

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 23/5/2021

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

A2. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός :

« Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$ ».

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας .

A3. Να δώσετε τον ορισμό της εξίσωσης εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{2021}{x^2-1}$ έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη.
2. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.
3. Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
4. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ , μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης, είναι διάστημα.
5. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$.

Μονάδες 7 – 4 – 4 – 10

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

Θέμα Β

Έστω συνάρτηση $f(x) = (x - e^x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία , ακρότατα , κοίλα και σημεία καμπής.

B2. Να βρείτε , αν υπάρχουν , τις ασύμπτωτες και τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες συντεταγμένων.

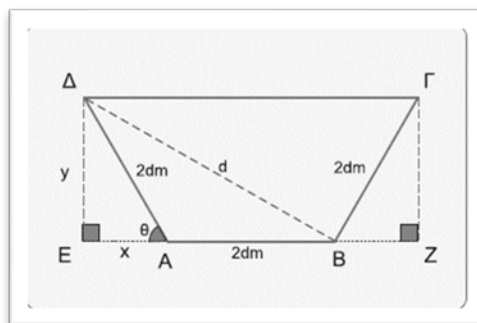
B3. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 12 – 7 – 6

Θέμα Γ

Το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος είναι ισοσκελές με :

$\Delta A = AB = B\Gamma = 2\text{dm}$ και $\widehat{\Delta A E} = \widehat{\Gamma B Z} = \theta$.



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ σε dm^2 , συνάρτηση του θ , είναι : $E(\theta) = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\eta\theta)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Γ2. Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ μεγιστοποιείται ;

Γ3. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης : $E(\theta) = 5$.

Γ4. Έστω ότι η γωνία θ μειώνεται με το χρόνο t , έτσι ώστε η προβολή $x(t)$ της πλευράς ΔA στην ευθεία AB , να αυξάνεται με ρυθμό $0,3 \text{ dm/sec}$. Την χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία $\theta(t_0) = \pi/3 \text{ rad}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ .

Μονάδες 6 – 7 – 6 – 6

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

Θέμα Δ

Έστω παραγωγισιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f(x) - f'(x) = \ln(e^{\frac{x^2-x-1}{x}} \cdot x)$, $x > 0$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = 0$

Δ1. α) Να δείξετε ότι $f'(1) = 0$ και $f(1) = -1$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{1-x} \cdot (f(x) - \ln x - x)$, $x > 0$ είναι σταθερή. Στην συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x + x - 2e^{x-1}$, $x > 0$.

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ3. α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η

$$f'(x_0) = f(2) - f(1).$$

β) Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της ευθείας

$$(ε) : y - f(x_0) = (f(2) - f(1))(x - x_0 - 5), \quad x > 0$$

όπου x_0 η μοναδική ριζά της εξίσωσης $f'(x) = f(2) - f(1)$.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 όπου το κινητό M να συναντήσει την καμπύλη $y = f(x)$.

Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = -f(x)$, $x > 0$.

Αν η ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > 0$ τέμνει τις C_f και C_g στα σημεία A , B αντίστοιχα να βρείτε :

α) Την ελάχιστη τιμή της απόστασης (AB) .

β) Το όριο : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{E(\lambda)}{\lambda^2 + 1}$, όπου $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου OAB και O η αρχή των αξόνων.