ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ Γ' ΤΑΞΗ ΛΥΚΕΙΟΥ 23/5/2021

ΘΕΜΑ Α

Α2 Α Έστω $f(0)=f(1)$ τότε Από Θ. Rolle $\exists x_0 \in (0,1): f'(x_0)=0$

Άτοπο άρα $f(0) \neq f(1)$

Α4 1. Λ 2. Λ 3. Λ 4. Σ 5. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1 $f'(x) = (1-e^x)e^{-x} - e^{-x}(x-e^x) = e^{-x}(1-e^x-x+e^x)$

$= e^{-x}(1-x)$

x		1	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

ΟΜ $\longrightarrow$ $f_{max} = f(1) = e^{-1} - 1$

$f''(x) = e^{-x}(x-2)$

x		2	
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	∩		∪

ΣΚ $\rightarrow (2, 2e^{-2}-1)$

Β2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{x}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x \cdot e^{-x} - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x} - 1\right) = 0 - 1 = -1$

άρα $y = -1$ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜ. ΣΤΟ $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΑΣΥΜ. ΣΤΟ $-\infty$

ΜΕ ΤΟΝ $y'y$: $f(0)=-1 \rightarrow (0,-1)$

ΜΕ ΤΟΝ $x'x$: $f(x)=0 \Leftrightarrow (x-e^x)e^{-x}=0 \Leftrightarrow x-e^x=0$

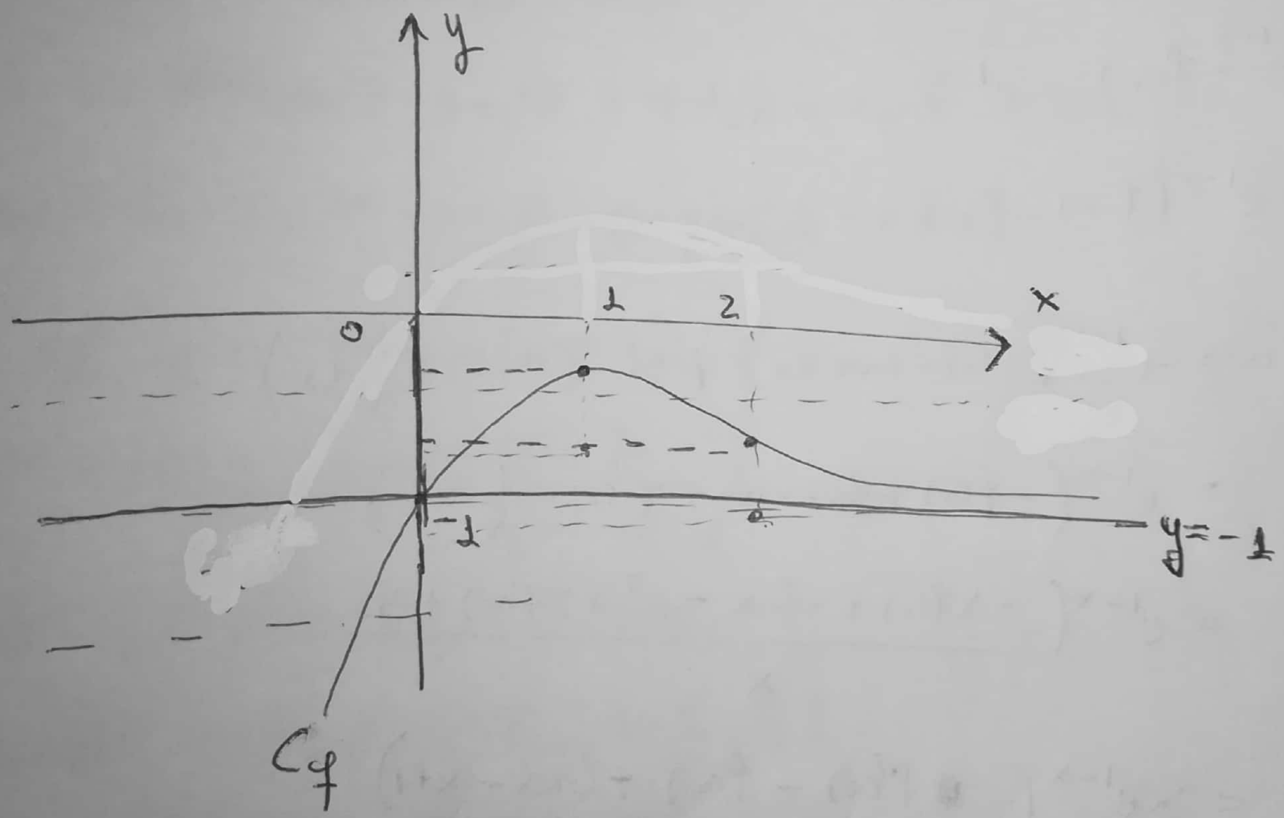
$\Leftrightarrow e^x=x$

ΑΔΥΝΑΤΗ

Αφού $e^x \geq x+1 > x$

$\boxed{B3}$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	
	$\boxed{-\infty}$	$\boxed{e^{-1}-1}$	$\boxed{2e^{-2}-1}$	$\boxed{-1}$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\sigma\upsilon\nu\theta$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \to$ ΟΞΕΙΑ ΓΩΝΙΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

$\eta\mu\theta = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2\eta\mu\theta$

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB + \Delta\Gamma)\cdot y = \frac{1}{2}(2 + 2 + 2x)\cdot y$$

$$= \frac{1}{2}(4 + 2x)y = (2 + x)y = (2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot 2\eta\mu\theta$$

άρα $E(\theta) = 4\eta\mu\theta\cdot(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Γ2 $E'(\theta) = 4\sigma\upsilon\nu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) - 4\eta\mu^2\theta =$

$$= 4\sigma\upsilon\nu\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta - 4\eta\mu^2\theta = 4\sigma\upsilon\nu\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta - 4 + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta$$

άρα $E'(\theta) = 8\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4\sigma\upsilon\nu\theta - 4 = 4(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1)$

$$\left(\begin{array}{l} \bullet\ 2y^2 + y - 1 = 2(y+1)(y - \frac{1}{2}) \\ \Delta = 1 + 8 = 9 \quad y = \frac{-1+3}{4} = 1/2 \ \text{ή}\ \frac{-4}{4} = -1 \end{array} \right)$$

άρα $E'(\theta) = 8(\sigma\upsilon\nu\theta + 1)(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2})$

▸ Πρόσημο $\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2} = g(\theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$
θ_0	0	$\pi/2$	
$g(\theta_0)$	$1/2$	$-1/2$	
$g(\theta)$	$+$	$-$	

Για θ	0		$\pi/3$		$\pi/2$
$\sigma\upsilon\nu\theta+1$		$+$		$+$	
$\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$E'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$E(\theta)$		$\nearrow$	ΟΜ	$\searrow$	

Για $\theta=\frac{\pi}{3}$ $\quad OM = E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\eta\mu\frac{\pi}{3}\cdot\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right) =$

$$= 4\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2} = 3\sqrt{3}$$

$\boxed{\Gamma 3}$ $\quad E(\hat{A}_1) = (0, 3\sqrt{3}]\quad,\quad E(\hat{A}_2) = (4, 3\sqrt{3}]$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} E(\theta) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} 4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta) = 4(1+0) = 4$$

$5\in E(A_2)$ κ' $5\in E(A_2)$ $\longrightarrow$ 2 ΑΚΡΙΒΩΣ ΡΙΖΕΣ ...

$\boxed{\Gamma 4}$ $\quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{2} \iff 2\sigma\upsilon\nu\theta = x$

- $2\sigma\upsilon\nu\theta(t) = x(t)$
- $-2\eta\mu\theta(t)\cdot\theta'(t) = x'(t)$

$t=t_0$: $\quad \theta'(t_0) = \dfrac{x'(t_0)}{-2\eta\mu\theta(t_0)} = \dfrac{0{,}3}{-2\eta\mu\frac{\pi}{3}} = \dfrac{0{,}3}{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{0{,}3}{\sqrt{3}}$ rad/sec

$$= -\frac{\sqrt{3}}{10}\text{ rad/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 (α) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} - \dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}\right)$ ↳ θέτουμε $u=-h$

$= f'(1) - (-f'(1)) = 2f'(1)$

Άρα $f'(1)=0$

Για $x=1$: $f(1)-f'(1) = \ln e^{-1} \Leftrightarrow f(1)=-1$

β) $h'(x) = \dots = 0 \Leftrightarrow h(x) = c \in \mathbb{R}$

Για $x=1$: $e^0\,(f(1)-1) = c \Leftrightarrow c=-2$

Άρα $e^{1-x}(f(x)-\ln x - x) = -2 \Leftrightarrow$

$f(x) - \ln x - x = -2e^{x-1} \Leftrightarrow f(x) = \ln x + x - 2e^{x-1}$, $x>0$

Δ2 α) f παρ/μη στο $[1,2]$ από ΘΜΤ $\exists\, x_0 \in (1,2)$:

$f'(x_0) = f(2)-f(1)$

Δ2 $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 - 2e^{x-1}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} - 2e^{x-1} < 0$ άρα f' ↓ στο $(0,+\infty)$

x	0		1	
$f'(x)$	‖	+	0	−
$f(x)$	‖	↗	ΟΜ	↘

$\boxed{\Delta 3}$

(8) Η (εφ) ΤΗΣ C_f ΣΤΟ $(x_0, f(x_0))$ ΕΙΝΑΙ

$$(\varepsilon_1): \ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon_1): \ y - f(x_0) = \left(f(2) - f(1)\right)(x - x_0)$$

ΕΠΕΙΔΗ Η C_f ΕΙΝΑΙ $\frown$ ΣΤΟ $(0, +\infty)$ ΤΟΤΕ

$$f(x) \leq \left(f(2) - f(1)\right)(x - x_0) + f(x_0)$$

ΜΕ ΤΟ ΙΣΟΝ ΝΑ ΙΣΧΥΕΙ ΜΟΝΟ ΟΤΑΝ $x = x_0$ (ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ)

ΑΡΚΕΙ ΝΔΟ :

$$\left(f(2) - f(1)\right)(x - x_0) + f(x_0) < \left(f(2) - f(1)\right)(x - x_0 - 5) + f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \left(f(2) - f(1)\right)(-5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 > f(2) - f(1) \Leftrightarrow f(1) > f(2) \underset{x \geq 1}{\overset{f \downarrow}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow 1 < 2 \quad \text{ΙΣΧΥΕΙ}$$

Δ4 $A(\lambda, f(\lambda))$ και $B(\lambda, g(\lambda))$

α) $(AB) = \sqrt{(f(\lambda)-g(\lambda))^2} = |f(\lambda)-g(\lambda)|$
$= 2|f(\lambda)|$

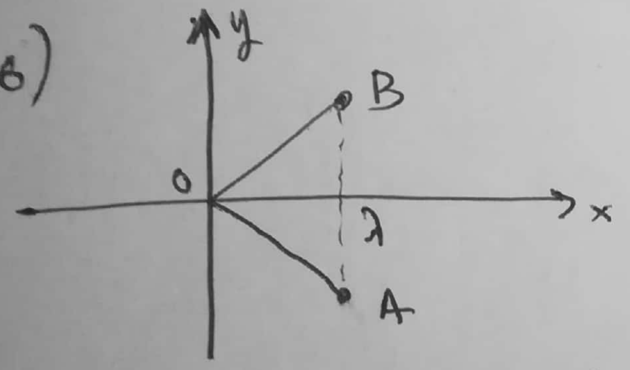
Εφόσον, $f(x) \leq f(1) = -1$ Δ4α

$(AB) = d(\lambda) = -2f(\lambda)$

x		0		1	
$d'(\lambda)$			$-$		$+$
$d(\lambda)$			$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$

Ώστε $(AB)_{min} = d(1) = 2$

β)



$E(\lambda) = \frac{\lambda (AB)}{2} = -\lambda f(\lambda)$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} -\frac{\lambda(\ln\lambda+\lambda-2e^{\lambda-1})}{\lambda^2+1} = \lim_{\lambda\to+\infty} -\frac{\lambda^2\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}+1-2\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\right)}{\lambda^2+1}$$

$$= -\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\left(\underbrace{\frac{\ln\lambda}{\lambda}}_{\downarrow \text{DLH} \atop 0}+1-2\underbrace{\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}}_{\downarrow \text{DLH} \atop -\infty}\right) = -1(-\infty) = \boxed{+\infty}$$