

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1  
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13  
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551  
www.en-dynamei.gr



## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 10/10/2020

### Θέμα Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

**A2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  είναι παραγωγισιμη στο  $(0, +\infty)$  και  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**A3.** Ποτέ μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  καλείται 1-1 ;

**A4.** Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση .

i. Αν  $f(x) = 5^{3x}$  τότε η  $f'(x)$  ισούται με :

- A)  $3x \cdot 5^{3x}$       B)  $\frac{5^{3x}}{3\ln 5}$       Γ)  $3 \cdot 5^{2x}$   
Δ)  $3 \cdot 5^{3x}$       Ε)  $5^{3x} \cdot \ln 125$

ii. Αν  $f(x) = \sin^3(x+1)$  τότε η  $f'(\pi)$  ισούται :

- A)  $3 \cdot \sin^3(\pi+1) \cdot \eta\mu(\pi+1)$       B)  $3 \cdot \sin^2(\pi+1)$   
Γ)  $-3 \cdot \sin^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$       Δ)  $3\pi \cdot \sin^2(\pi+1)$

iii. Αν  $f(x) = (x^2 - 1)^3$  τότε η εβδόμη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:

- A) 1      B) -1      Γ) 0      Δ) 27      Ε) Δεν υπάρχει

Μονάδες : 5 – 7 – 4 – 9

### Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{3}{x^2+3}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $g(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, +\infty)$ .

**B1.** Να βρείτε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**B2.** Αν  $h(x) = (f \circ g)(x) = \frac{3}{x^2+3}$ ,  $x \in [0, +\infty)$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την  $h^{-1}$ .

**B3.** Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης  $f''(x)$ .

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1  
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13  
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551  
www.en-dynamei.gr



**B4.** Έστω  $h^{-1}(x) = \frac{3}{x} - 3$ ,  $x \in (0,1]$ . Να κάνετε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $g(|x|)$  και  $h^{-1}$  στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

**Μονάδες : 5 – 8 – 8 – 4**

### Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση :  $f(x) = \begin{cases} \frac{7}{2}x + \frac{1-\sin x}{x} + 1, & x < 0 \\ x^2 + 4x + \alpha, & x \geq 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

**Γ2.** Να βρείτε την παραγωγό της  $f(x)$ .

**Γ3.** Για  $x \geq 0$  να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι 1-1 και να βρεθεί η αντιστροφή συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**Γ4.** Να λυθεί η ανίσωση :  $f^2(x^2 - x + 1) - 36 < 0$ . **Μονάδες : 5 – 7 – 7 – 6**

### Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις :

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο  $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$
- $g : (-\infty, 0) \cup (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο  $g(x) = \frac{e^x}{x}$

**Δ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) + f(1 - x) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ3.** Να δείξετε ότι η  $g$  είναι 1 – 1 για κάθε  $x \in (0,1)$  και στην συνέχεια να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot f(g(x))}{e^x}$ .

**Δ4.** Να λύσετε στο διάστημα  $(0, \frac{\pi}{2})$  την εξίσωση :

$$f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f(\epsilon\phi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}).$$

**Μονάδες : 5 – 5 – 6 – 9**