

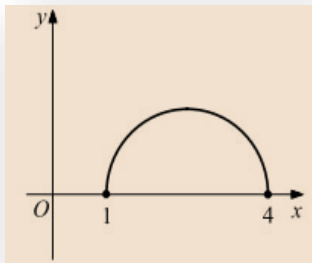
1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 14/2/2021

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

A2. Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;
(να αιτιολογήσετε την απάντησή σας)



α) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $(1,4)$

β) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $[1,4]$

γ) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,4)$

δ) υπάρχει $x_0 \in (1,4) : f'(x_0) = 0$.

A3. Ποτέ μια συνάρτηση καλείται κυρτή σε ένα διάστημα Δ ;

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

β) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\beta)$ μέγιστη τιμή της συνάρτησης, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f'(\beta) = 0$.

Μονάδες : 9 – 6 – 4 – 6

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$, $x \neq 1$.

B1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της Cf.

B2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

B3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

B4. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .

Μονάδες : 5 – 8 – 8 – 4

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x - \ln(x + 1)$, με $x > -1$, όπου $a > 0$ και $a \neq 1$.

Γ1. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

Για $a = e$:

Γ2. α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

β) Να δείξετε ότι: $f(x + 1) - f(x) > f'(x)$ για κάθε $x > -1$. (μονάδες 4)

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^3(x) + f(x) = 10$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

Μονάδες : 6 – 6 – 6 – 7

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



Θέμα Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty)$ για την οποία ισχύει :

- $xe^x + f(x) = e^x + xf'(x)$, $x \geq 0$
- $f(\ln 2) < 2$

Δ1. α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερός αριθμός $\lambda > 0$, ώστε :

$$\frac{e^x - f(x)}{x} = \lambda, \text{ για κάθε } x > 0. \text{ (μονάδες 4)}$$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - \lambda x$, $x \geq 0$. (μονάδες 2)

Δ2. α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (μονάδες 2)

β) Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει

$$e^x \geq \lambda x \text{ για κάθε } x \geq 0. \text{ (μονάδες 3)}$$

Για $\lambda = e$:

Δ3. Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon) : y = (1 - e)x + 1$ εφάπτεται στην C_f και στην συνέχεια να βρείτε τους αριθμούς $\beta, \gamma \in [0, +\infty)$ για τους οποίους ισχύει :

$$f(\beta) + f(\gamma - 2) \leq (1 - e)(\beta + \gamma - 2) + 2$$

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - \ln x = 0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο διάστημα $(0, 2)$ και να βρείτε τη μια ριζά από τις δυο.

Μονάδες : 6 – 5 – 6 – 8