ΛΥΣΕΙΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 14-2-2021

## ΘΕΜΑ Α

**A2** δ) Από σχήμα βλέπουμε ότι η $f$ παρουσιάζει στο $x_0$ (εσωτερικό) ολικό μέγιστο άρα Θ. Fermat $f'(x_0)=0$. β' τρόπος: Θ. Rolle

**A4** α) Λ   β) Λ   γ) Λ

## ΘΕΜΑ Β

**B1** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \rightarrow \boxed{x=1}$ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

• $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ κ' $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-1} = 0 \rightarrow \boxed{\beta=0}$

άρα $y=x$ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ ΤΗΣ $C_f$ ΣΤΟ $\pm\infty$

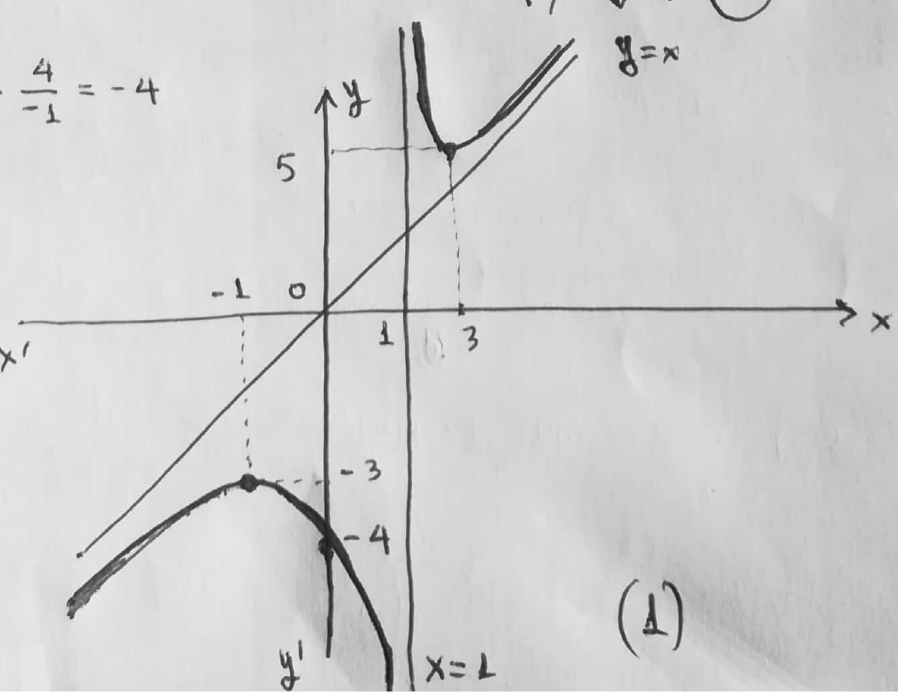
**B2** $f'(x) = \dots = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | $\boxed{-3}$ ΤΜ | ↘ | ‖ | ↘ | $\boxed{5}$ Τ.Ε. | ↗ | |

**B3** $f''(x) = \dots = \frac{8}{(x-1)^3}$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | − | ‖ | + | |
| $f$ | | ⌒ | ‖ | ⌣ | |

**B4** $f(0) = \frac{4}{-1} = -4$




(1)

ΘΕΜΑ Γ

**Γ1** Είναι $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ άρα η $f$ παρουσ. στο $0 \in (-1,+\infty)$ ελάχιστο άρα από Θ. Fermat $\boxed{f'(0)=0}$

▸ $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha - \dfrac{1}{x+1}$, $f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \ln e \Leftrightarrow \alpha = e$

**Γ2** α) $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}$, $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ άρα $f \cup$ στο $(-1,+\infty)$

β) $f$ παραγωγίσιμη στο $[x, x+1]$ άρα από ΘΜΤ $\exists\, \xi \in (x, x+1)$:

$f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$, $x < \xi < x+1 \overset{f' \uparrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) < f'(\xi)$

$\Leftrightarrow f(x+1) - f(x) > f'(x)$

**Γ3** Για $x > 0 \overset{f' \uparrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f \uparrow$ στο $(0,+\infty)$

Για $x < 0 \overset{f' \uparrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f \downarrow$ στο $(-1,0)$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | Ο.Ε. | $\nearrow$ | |

άρα $f(0)=1$ ολικό ελάχιστο

**Γ4** ▸ θεωρώ $g(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ άρα $g \uparrow$

οπότε κ' "1-1", Είναι $f^3(x) + f(x) = 10 \Leftrightarrow g(f(x)) = g(2) \overset{1-1}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \boxed{f(x) = 2}$ $f(A_1) = [1,+\infty)$, $f(A_2) = [1,+\infty)$

▸ $2 \in f(A_1)$, $2 \in f(A_2)$ άρα $\rightarrow$ 2 ακριβώς ρίζες

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1** Θεωρούμε $g(x) = \dfrac{e^x - f(x)}{x}, \ x>0$

α) $g'(x) = \dfrac{(e^x - f'(x))\cdot x - e^x + f(x)}{x^2} = \dfrac{xe^x - xf'(x) - e^x + f(x)}{x^2}$

$= \dfrac{xe^x + f(x) - (xf'(x) + e^x)}{x^2} = 0$ άρα $g(x) = \lambda \in \mathbb{R}$

Για $x = \ln 2$: $\dfrac{e^{\ln 2} - f(\ln 2)}{\ln 2} = \lambda \Leftrightarrow \dfrac{2 - f(\ln 2)}{\ln 2} = \lambda$

άρα $\lambda > 0$

β) $f$ συνεχής στο $x_0 = 0$ άρα $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$

Για $x=0$: $0\cdot e^0 + f(0) = e^0 + 0\cdot f'(0) \Leftrightarrow f(0) = 1$

Από α) έχουμε $\dfrac{e^x - f(x)}{x} = \lambda \Leftrightarrow f(x) = e^x - \lambda x, \ x>0$

άρα $f$ συνεχής στο $0$ τότε $f(x) = \begin{cases} e^x - \lambda x, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases} \rightarrow f(x) = e^x - \lambda x, \ x \geq 0$

**Δ2** α) $f'(x) = e^x - \lambda$

| $x$ | $0$ | | $\ln\lambda$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Τ.Μ $= 1$     Ο.Ε $= \lambda - \lambda\ln\lambda = f_{min}$

β) Είναι: $e^x - \lambda x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \ \forall x \geq 0$ άρα και $f_{min} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda - \lambda\ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln\lambda \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq e$

οπότε $\boxed{\lambda_{max} = e}$

$\boxed{\Delta 3}$ $f(x) = e^x - ex,\ x \geq 0$

$f'(x) = e^x - e$

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής τότε:

$f'(x_0) = e^{x_0} - e = 1 - e \Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = 0}$

άρα $f'(0) = 0$ κ' $f(0) = 1$ οπότε η $(\varepsilon)$: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$\Leftrightarrow y - 1 = (1 - e)x \Leftrightarrow y = (1-e)x + 1$

- $f''(x) = e^x > 0$ άρα $f$ ∪ στο $[0, +\infty)$

άρα $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq (1-e)x + 1 \quad \forall x \geq 0$

- Για $x = \beta$: $f(\beta) \geq (1-e)\beta + 1$
- Για $x = \gamma - 2$: $f(\gamma - 2) \geq (1-e)(\gamma - 2) + 1$ (+)

$f(\beta) + f(\gamma - 2) \geq (1-e)(\beta + \gamma - 2) + 2$ (1)

Έχουμε, $f(\beta) + f(\gamma - 2) \leq (1-e)(\beta + \gamma - 2) + 2$ (2)

Από (1) κ' (2) $\Rightarrow f(\beta) + f(\gamma - 2) = (1-e)(\beta + \gamma - 2) + 2$

ΚΑΙ ΕΠΕΙΔΗ Η ΙΣΟΤΗΤΑ ΙΣΧΥΕΙ ΜΟΝΟ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ $(0, 1)$

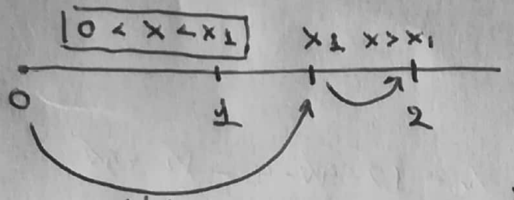
τότε $\boxed{\beta = 0}$ κ' $\gamma - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = 2}$

**Δ4** Θεωρούμε $h(x)=e^x-ex-\ln x$, $x>0$

• $h'(x)=e^x-e-\frac{1}{x}$ , $h''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$ άρα $h \nearrow$ στο $(0,+\infty)$

• $h'(1)=e-e-1=-1<0$
$h'(2)=e^2-e-\frac{1}{2}\simeq 4{,}09>0$ $\Big\rangle$ $h'(1)h'(2)<0$

Επειδή $h'$ συνεχής στο $[1,2]$ από Θ. Bolzano $\exists\, x_1\in(1,2)$: $h'(x_1)=0$



Για $x<x_1 \overset{h'\nearrow}{\Longleftrightarrow} h'(x)<0 \Rightarrow h \searrow$ στο $(0,x_1)$

Για $x>x_1 \overset{h'\nearrow}{\Longleftrightarrow} h'(x)>0 \Rightarrow h \nearrow$ στο $(x_1,+\infty)$

| $x$ | 0 | 1 | $x_1$ | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $-$ 0 | $+$ |
| $h(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

• Είναι $h(1)=e-e-\ln 1=0$ άρα $x_2=1$ μοναδική ρίζα της $h$ στο διάστημα $(0,x_1]$ αφού $h \searrow$ στο $(0,x_1]$

• $x_1>1 \overset{h\searrow}{\Longleftrightarrow} h(x_1)<h(1) \Longleftrightarrow h(x_1)<0$

$h$ συνεχής κ' $\nearrow$ στο $[x_1,2] \rightarrow h(A_2)=[h(x_1),h(2)]$

$h(2)=e^2-2e-\ln 2>0$ άρα $0\in h(A_2)$ οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(x_1,2)$ κ' επειδή $h \nearrow$ στο $(x_1,2)$ είναι ακριβώς μια

Τελικά, η $h$ έχει 2 ακριβώς ρίζες στο $(0,2)$