ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2021

ΘΕΜΑ Α

A_1) Θεωρία σχολικού σελ 74

A_2) Αποδείξεις σχολικού σελ 60-61

A_3) 1) Σωστό
2) Σωστό
3) Σωστό
4) ΛΑΘΟΣ
5) ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

B_1) α)

$$\frac{ημ(24π+φ)\cdot συν(37π-φ)}{σφ\left(\frac{17π}{2}+φ\right)\cdot σφ(π+φ)} = \frac{ημφ\cdot(-συνφ)}{-εφφ\cdot σφφ} = ημφ\cdot συνφ$$

β)

$$\frac{-(-συνθ)}{1-ημθ} = \frac{-ημθ-1}{-συνθ} \Leftrightarrow -συν^2θ = -(1+ημθ)(1-ημθ)$$

$$\Leftrightarrow -συν^2θ = -1+ημ^2θ \Leftrightarrow ημ^2θ+συν^2θ=1 \text{ ισχύει}$$

B_2) 1)

$$συν\left(\frac{π}{2}-2x\right)=συν\left(\frac{π}{6}-x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{π}{2}-2x = 2kπ+\frac{π}{6}-x \\ \frac{π}{2}-2x = 2kπ-\frac{π}{6}+x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = 2kπ-\frac{π}{3} \Leftrightarrow x=-2kπ+\frac{π}{3} \\ -3x=2kπ-\frac{2π}{3} \Leftrightarrow x=-\frac{2kπ}{3}+\frac{2π}{9} \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

2) $2\eta\mu^2(2x) + 5\eta\mu(2x) - 3 = 0$

Θέτω $\eta\mu 2x = \omega$, $2\omega^2 + 5\omega - 3 = 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49$, $\omega_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -3 < -1 \end{cases}$ Απορ

$\eta\mu 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

3) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} - x$

$\Leftrightarrow -x = k\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = -k\pi + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

$0 < -k\pi + \frac{\pi}{6} < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} < -k\pi < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{6} < k < \frac{1}{6} \longrightarrow k = 0$ άρα $\boxed{x = \frac{\pi}{6}}$

ΘΕΜΑ Γ

1) $f(0) = 2 \Leftrightarrow -\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \beta = 2 \Leftrightarrow -\alpha \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \beta = 2$

$\Leftrightarrow \boxed{-\alpha + 2\beta = 4}$

$f(\pi) = 3 - \sqrt{3} \Leftrightarrow -\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \beta = 3 - \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \beta = 3 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \boxed{-\alpha\sqrt{3} + 2\beta = 6 - 2\sqrt{3}}$

$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 4 \\ -\alpha\sqrt{3} + 2\beta = 6 - 2\sqrt{3} \end{cases} \overset{(-)}{\Longrightarrow} \alpha(1 - \sqrt{3}) = 2 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha(1-\sqrt{3}) = 2(1-\sqrt{3})$

$\boxed{\alpha = 2}$

Άρα $\boxed{\beta = 3}$

2) $f(x) = -2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 3$, $A_f = \mathbb{R}$ $T = 4\pi$

$f(x + 4\pi) = -2\sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 3 = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 3 = f(x)$

Ομοίως $f(x - 4\pi) = f(x)$ Άρα f περιοδική με $T = 4\pi$

3) Ισχύει $-1 \le \sigma υν\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) \le 1 \overset{(-2)}{\Leftrightarrow}$

$-2 \le -2\sigma υν\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) \le 2 \overset{+3}{\Leftrightarrow}$

$1 \le -2\sigma υν\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+3 \le 5$

Άρα $\underset{\text{min}}{1} \le f(x) \le \underset{\text{max}}{5}$

$f(x)=5 \Leftrightarrow -2\sigma υν\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+3=5 \Leftrightarrow -2\sigma υν\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=2$

$\sigma υν\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow \sigma υν\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sigma υν\,\pi$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi \\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=2k\pi-\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}=2k\pi+\frac{4\pi}{3} \\ \frac{x}{2}=2k\pi-\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4k\pi+\frac{8\pi}{3} \\ x=4k\pi-\frac{4\pi}{3} \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$

4) $f(x)=2 \Leftrightarrow -2\sigma υν\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+3=2 \Leftrightarrow \sigma υν\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$\sigma υν\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sigma υν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{3} \\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=2k\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \\ \frac{x}{2}=2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4k\pi+\frac{4\pi}{3} \\ x=4k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$

5) $g(x)=f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=-2\sigma υν\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+3=-2\sigma υν\frac{x}{2}+3$

$1 \le g(x) \le 5$, $T=4\pi$

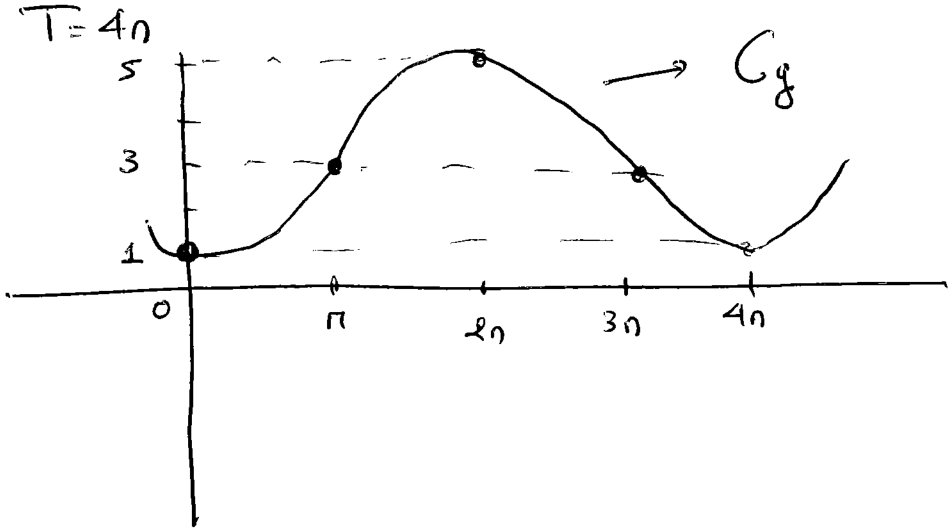
$g(0)=1$

$g(\pi)=3$

$g(2\pi)=5$

$g(3\pi)=3$

$g(4\pi)=1$



$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Δ}}$

1) $3f(x)+f(-x)=2\eta\mu(\pi x)$ (1)

$x=0$ $\quad 3f(0)+f(0)=2\cdot 0 \Leftrightarrow \boxed{f(0)=0}$

Συμμετρική ως προς $O(0,0) \longrightarrow f$ περιττή

$A_f=\mathbb{R}$ Αντικαθιστώ όπου x το $-x$

$$3f(-x)+f(x)=-2\eta\mu(\pi x) \quad (2)$$

Προσθέτω κατά μέλη

$$3f(x)+f(-x)+3f(-x)+f(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$4f(x)+4f(-x)=0 \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$$ Άρα f περιττή.

2) Αφού $f(-x)=-f(x)$

τότε $3f(x)-f(x)=2\eta\mu(\pi x) \Leftrightarrow 2f(x)=2\eta\mu(\pi x)$

$\Leftrightarrow f(x)=\eta\mu(\pi x).$

Η περίοδος $T=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

3) $f(x)=h(x) \Leftrightarrow \eta\mu(\pi x)=1+\left|x-\frac{1}{2}\right|$

ισχύει $\left|x-\frac{1}{2}\right|\geq 0 \Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right|+1\geq 1 \Leftrightarrow \eta\mu(\pi x)\geq 1$

Αν $\eta\mu(\pi x)>1$ είναι αδύνατο οπότε πρέπει $\eta\mu(\pi x)=1$

Άρα $\left|x-\frac{1}{2}\right|+1=1 \Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right|=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$

Επαληθεύω στην εξίσωση $\eta\mu\left(\frac{1}{2}\cdot\pi\right)=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\eta\mu\frac{\pi}{2}=1$ άρα μοναδική λύση

είναι $\boxed{x=\frac{1}{2}}$

4) $\begin{cases} f^2(x)+f^2(y)=1 \\ f(x)=f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ημ^2(πx)+ημ^2(πy)=1 \\ ημ(πx)=ημ(πy) \end{cases}$

Αντικαθιστώ $2ημ^2(πx)=1 \Leftrightarrow ημ^2(πx)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} ημ(πx)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ ημ(πx)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

- $ημ(πx)=ημ\frac{π}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} πx=2kπ+\frac{π}{4} \\ πx=2kπ+\frac{3π}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2k+\frac{1}{4} \\ x=2k+\frac{3}{4} \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$

$0\le x\le 1 \Leftrightarrow 0\le 2k+\frac{1}{4}\le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le 2k\le\frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{8}\le k\le\frac{3}{8} \longrightarrow \boxed{k=0}$

Άρα $x=\frac{1}{4} \longrightarrow y=\frac{1}{4}$ ή $y=\frac{3}{4}$

$0\le x\le 1 \Leftrightarrow 0\le 2k+\frac{3}{4}\le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le 2k\le\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{8}\le k\le\frac{1}{8} \longrightarrow \boxed{k=0}$

Άρα $x=\frac{3}{4} \longrightarrow y=\frac{3}{4}$ ή $y=\frac{1}{4}$

- $ημ(πx)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ημ(πx)=ημ\left(-\frac{π}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} πx=2kπ-\frac{π}{4} \\ πx=2kπ+\frac{5π}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2k-\frac{1}{4} \\ x=2k+\frac{5}{4} \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$

$0\le x\le 1 \Leftrightarrow 0\le 2k-\frac{1}{4}\le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\le 2k\le\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{8}\le k\le\frac{5}{8}$ Δεν υπάρχει $k\in\mathbb{Z}$

$0\le x\le 1 \Leftrightarrow 0\le 2k+\frac{5}{4}\le 1 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}\le 2k\le -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{8}\le k\le -\frac{1}{8}$.

Οπότε οι λύσεις είναι
$x=\frac{1}{4}$ κ $y=\frac{1}{4} \longrightarrow \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$
$x=\frac{1}{4}$ κ $y=\frac{3}{4} \longrightarrow \left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$
$x=\frac{3}{4}$ κ $y=\frac{1}{4} \longrightarrow \left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$
$x=\frac{3}{4}$ κ $y=\frac{3}{4} \longrightarrow \left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$