Λύσεις θεμάτων Πανελληνίων 29/5/2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. α

Α2. β

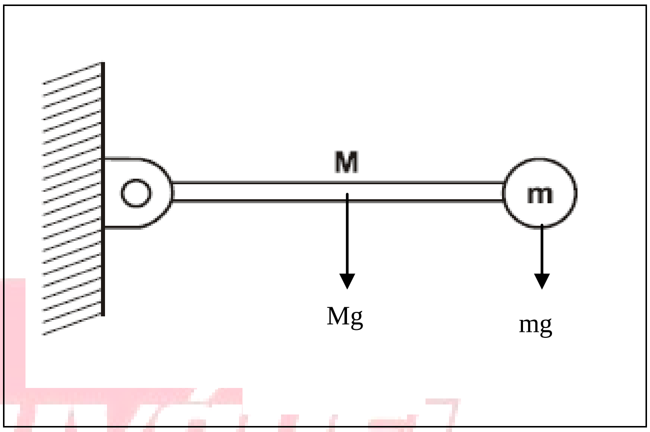
Α3. α

Α4. δ

Α5. Α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση: **iii**



Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της ράβδου είναι: $I_{ολ} = I_ρ + I_{σφ} \Rightarrow$

$$I_{ολ} = \frac{1}{3}M\ell^2 + \frac{M}{2}\ell^2 \Rightarrow I_{ολ} = \frac{5}{6}M\ell^2$$

Η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος είναι:

ΘΝΣ: $\Sigma\tau = I_{ολ}a_{γων} \Rightarrow$

$$a_{γων} = \frac{\Sigma\tau}{I_{ολ}} = \frac{Mg\frac{\ell}{2} + \frac{M}{2}g\ell}{\frac{5}{6}M\ell^2} \Rightarrow a_{γων} = \frac{6g}{5\ell}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου είναι:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma\tau_ρ = I_ρ a_{γων} = \frac{1}{3}M\ell^2 \cdot \frac{6g}{5\ell} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{2}{5}Mg\ell}$$

Β2. Σωστή απάντηση: **iii**

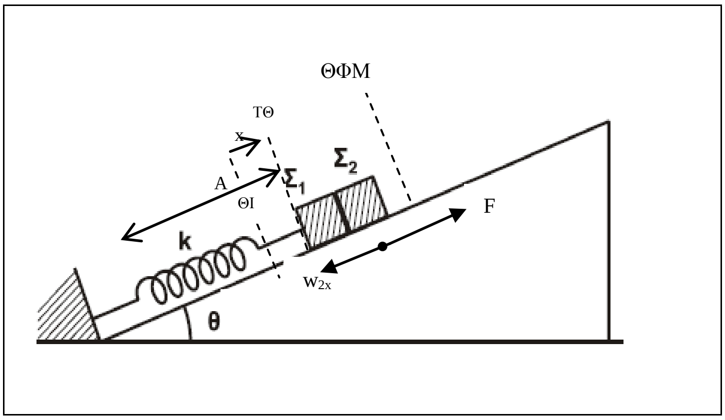
Η θέση του τρίτου δεσμού βρίσκεται από την εξίσωση $x_Δ = (2κ+1)\frac{λ}{4} \to$ για $κ = 2$ $x_{Δ_3} = \frac{5λ}{4}$

Η θέση του σημείου Μ είναι $x_Μ = x_{Δ_3} + \frac{λ}{12} = \frac{5λ}{4} + \frac{λ}{12} \Rightarrow x_Μ = \frac{4λ}{3}$

Το πλάτος του σημείου Μ είναι: $A'_Μ = 2A\left|συν\left(\frac{2\pi x_Μ}{λ}\right)\right| = 2A\left|συν\left(\frac{2\pi\frac{4λ}{3}}{λ}\right)\right| = 2A\left|συν\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right| \Rightarrow$

$$A'_Μ = 2A\left|συν\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right| = 2A\left|συν\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right| \Rightarrow \boxed{A'_Μ = A}$$

Β3. Σωστή απάντηση: **i**



Το σώμα Σ_2 καθώς ταλαντώνεται στη διεύθυνση της κίνησης από δυνάμεις δέχεται τη συνιστώσα $\vec{w}_{2x}$ και τη δύναμη επαφής $\vec{F}$ από το σώμα Σ_1.

Σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα για το σώμα Σ_2 έχουμε:

$\Sigma F_{2x} = m_2 a \Rightarrow F - w_{2x} = -m_2\omega^2 x \Rightarrow$

$F = w_{2x} - \omega^2 x$ όπου

$$D = k \Rightarrow (m_1+m_2)\omega^2 = k \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow F = m_2 g\cdot\eta\mu\theta - m_2\frac{k}{m_1+m_2}x \text{ με } -A \le x \le +A$$

Η ελάχιστη δύναμη που δέχεται το σώμα Σ_2 από το σώμα Σ_1 είναι όταν βρεθεί στην ακραία θέση, δηλαδή όταν $x = A$. Άρα $F_{\min} = m_2 g\cdot\eta\mu\theta - m_2\frac{m_1+m_2}{k}A$. Για να μη χαθεί η επαφή θα πρέπει

$$F_{\min} > 0 \Rightarrow m_2 g\cdot\eta\mu\theta - m_2\frac{k}{m_1+m_2}A > 0 \Rightarrow m_2\frac{k}{m_1+m_2}A < m_2 g\cdot\eta\mu\theta \Rightarrow kA < (m_1+m_2)g\cdot\eta\mu\theta$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από την ΑΔΕΤ στο κύκλωμα έχουμε: $E = U_E + U_B \Rightarrow U_E = E - U_B \Rightarrow U_E = E - \frac{1}{2}Li^2$.

Δίνεται ότι $U_E = 8\cdot10^{-2}(1-i^2) \Rightarrow U_E = 8\cdot10^{-2} - 8\cdot10^{-2}\cdot i^2 \ S.I.$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις προκύπτει ότι $E = 8\cdot10^{-2}J$ και $\frac{1}{2}L = 8\cdot10^{-2}H \Rightarrow L = 16\cdot10^{-2}H$

Ισχύει ότι $E = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow 8\cdot10^{-2} = \frac{1}{2}16\cdot10^{-2}I^2 \Rightarrow I = 1A$

και $E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow 8\cdot10^{-2} = \frac{1}{2}C(40)^2 \Rightarrow C = 10^{-4}F$

Η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων υπολογίζεται από τον τύπο $T = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow \boxed{T = 8\pi\cdot10^{-3}s}$

Γ2. Για τον πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t=0,\ q=+Q, i=0$ άρα $i = -I\cdot\eta\mu(\omega t)$ οπότε

$$U_E = 8\cdot10^{-2} - 8\cdot10^{-2}\cdot i^2 = 8\cdot10^{-2} - 8\cdot10^{-2}\cdot I^2\cdot\eta\mu^2(\omega t) = 8\cdot10^{-2} - 8\cdot10^{-2}\cdot1\cdot\eta\mu^2\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{12}\right) \Rightarrow$$

$$U_E = 8\cdot10^{-2} - 8\cdot10^{-2}\cdot1\cdot\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(8\cdot10^{-2} - 8\cdot10^{-2}\cdot\frac{1}{4}\right)J \Rightarrow \boxed{U_E = 6\cdot10^{-2}J}$$

Γ3. Όταν $U_E = 3U_B \Rightarrow U_B = \frac{U_E}{3}$ και από ΑΔΕΤ $E = U_E + U_B \Rightarrow E = U_E + \frac{U_E}{3} \Rightarrow U_E = \frac{3}{4}E \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\Rightarrow q^2=\frac{3}{4}Q^2\Rightarrow |q|=\frac{\sqrt{3}}{2}Q$$

Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος υπολογίζεται γνωρίζοντας ότι κάθε στιγμή στο LC κύκλωμα ισχύει $V_C=V_L\Rightarrow \frac{q}{C}=-L\frac{di}{dt}\Rightarrow \frac{di}{dt}=-\frac{q}{LC}=-\omega^2\cdot q\Rightarrow \frac{|di|}{dt}=\omega^2\cdot|q|=\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 Q\Rightarrow$

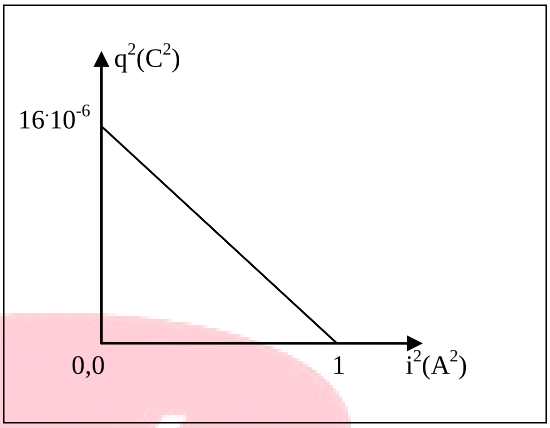
$\frac{|di|}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\cdot\omega Q=\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\cdot I$ όπου $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{\sqrt{LC}}=250\frac{rad}{s}$ άρα $\boxed{\frac{|di|}{dt}=125\sqrt{3}\frac{A}{s}}$

Γ4. Από την ΑΔΕΤ στο κύκλωμα έχουμε:

$$E=U_E+U_B\Rightarrow U_E=E-U_B\Rightarrow$$

$$U_E=E-\frac{1}{2}Li^2\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=E-\frac{1}{2}Li^2\Rightarrow$$

$$q^2=2CE-CLi^2\Rightarrow \boxed{q^2=16\cdot10^{-6}-16\cdot10^{-6}\cdot i^2}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στη θέση Γ έχουμε: ΘΝΜ: $\Sigma F_x = ma_{cm} \Rightarrow w_x - T_S = ma_{cm}$ (1)

ΘΝΣ: $\Sigma\tau = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_{T_S} = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$$T_S r = \frac{2}{5} m r^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_S = \frac{2}{5} m r a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

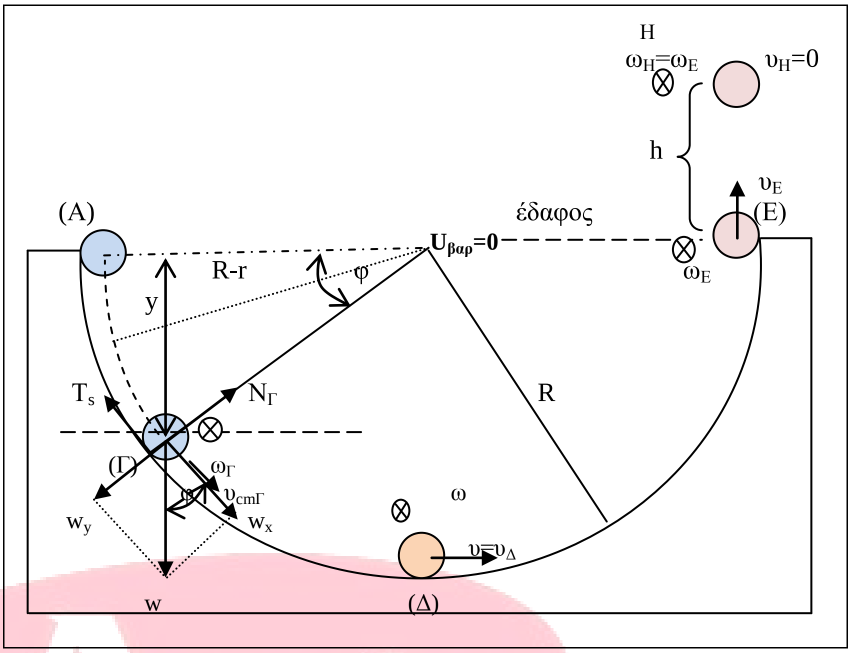
$$T_S = \frac{2}{5} m a_{cm} \xrightarrow{(1)}$$

$$T_S = \frac{2}{5}(w_x - T_S) \Rightarrow$$

$$T_S = \frac{2}{5} w_x - \frac{2}{5} T_S \Rightarrow \frac{7}{5} T_S = \frac{2}{5} w_x \Rightarrow$$

$$T_S = \frac{2}{7} w_x = \frac{2}{7} mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$\boxed{T_S = 4\sigma\upsilon\nu\varphi \; S.I.}$$



Δ2. Στον άξονα y στη διεύθυνση της ακτίνας του ημισφαιρίου από την κεντρομόλο έχουμε:

$$\Sigma F_y = \Sigma F_{\alpha\kappa\tau\iota\nu\iota\kappa\acute{\omega}\nu(\Gamma)} = m a_{\kappa(\Gamma)} \Rightarrow N_\Gamma - w_y = m\frac{\upsilon^2_{cm(\Gamma)}}{R-r} \Rightarrow N_\Gamma = mg\eta\mu\varphi + \frac{m\upsilon^2_{cm(\Gamma)}}{R-r} \; (2)$$

Εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ από τη θέση (Α) στη θέση (Γ) έχουμε:

$$E_{\text{ΜΗΧ(Α)}} = E_{\text{ΜΗΧ(Γ)}} \Rightarrow \cancel{K_{o\lambda(A)}}^{0} + \cancel{U_A}^{0} = K_{o\lambda(\Gamma)} + U_\Gamma \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} m\upsilon^2_{cm(\Gamma)} + \frac{1}{2} I\omega_\Gamma^2 - mgy \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2_{cm(\Gamma)} + \frac{1}{2}\frac{2}{5} m r^2 \omega_\Gamma^2 = mgy \Rightarrow \frac{1}{2} m\upsilon^2_{cm(\Gamma)} + \frac{1}{5} m\upsilon^2_{cm(\Gamma)} = mg(R-r)\eta\mu\varphi \Rightarrow \frac{7}{10} m\upsilon^2_{cm(\Gamma)} = mg(R-r)\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$m\upsilon^2_{cm(\Gamma)} = \frac{10}{7} mg(R-r)\eta\mu\varphi \; (3)$$

Από $(2) \xrightarrow{(3)} N_\Gamma = mg\eta\mu\varphi + \dfrac{\frac{10}{7} mg(R-r)\eta\mu\varphi}{R-r} \Rightarrow N_\Gamma = \dfrac{17}{7} mg\eta\mu\varphi \Rightarrow \boxed{N_\Gamma = 17N}$

Δ3. Εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ από τη θέση (Δ) στη θέση (Ε) έχουμε:

$$E_{\text{ΜΗΧ(Δ)}} = E_{\text{ΜΗΧ(Ε)}} \Rightarrow K_{o\lambda(\Delta)} + U_\Delta = K_{o\lambda(E)} + \cancel{U_E}^{0} \Rightarrow \frac{1}{2} m\upsilon^2_{cm(\Delta)} + \frac{1}{2} I\omega_\Delta^2 - mg(R-r) = \frac{1}{2} m\upsilon^2_{cm(E)} + \frac{1}{2} I\omega_E^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m\upsilon^2_{cm(\Delta)} + \frac{1}{2}\frac{2}{5} m r^2 \omega_\Delta^2 - (R-r)mg = \frac{1}{2} m\upsilon^2_{cm(E)} + \frac{1}{2}\frac{2}{5} m r^2 \omega_E^2 \Rightarrow$$

$$\frac{7}{10} m\upsilon^2_{cm(\Delta)} - \left(R - \frac{R}{8}\right) mg = \frac{7}{10} m\upsilon^2_{cm(E)} \Rightarrow \frac{7}{10} m\upsilon^2_{cm(\Delta)} - \frac{7}{8} Rmg = \frac{7}{10} m\upsilon^2_{cm(E)} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{cm(\mathrm{E})} = \sqrt{\upsilon^2_{cm(\Delta)} - \frac{10}{8} gR} \Rightarrow \upsilon_{cm(\mathrm{E})} = 4\frac{m}{s}$$

Εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ από τη θέση (Ε) στη θέση (Η) έχουμε:

$E_{\mathrm{MHX}(E)} = E_{\mathrm{MHX}(H)} \Rightarrow K_{o\lambda(\mathrm{E})} + \cancelto{0}{U_{\mathrm{E}}} = K_{o\lambda(\mathrm{H})} + U_{\mathrm{H}}$ όμως $\omega_E = \omega_H$ αφού η σφαίρα μόλις εγκαταλείψει το ημισφαίριο δέχεται μόνο το βάρος της οπότε $\Sigma\tau = \tau_w = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m\upsilon^2_{cm(E)} + \cancel{\frac{1}{2} I\omega^2_E} = \cancelto{0}{\frac{1}{2} m\upsilon^2_{cm(\mathrm{H})}} + \cancel{\frac{1}{2} I\omega^2_{\mathrm{H}}} + mgh \Rightarrow h = \frac{\upsilon^2_{cm(E)}}{2g} \Rightarrow \boxed{h = 0{,}8m}$$

Δ4. Στη θέση (Ε) μόλις η σφαίρα έχει χάσει την επαφή με το ημισφαίριο ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας της σφαίρας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\mu\tau\varphi}}{dt} + \frac{dK_{\sigma\tau\rho\varphi}}{dt} = -w \cdot \upsilon_{cm(E)} + \cancelto{0}{\tau_w} \cdot \omega_\varepsilon = -mg \cdot \upsilon_{cm(E)} \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = -56\frac{J}{s}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς το κέντρο μάζας είναι:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = \tau_w \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = 0}$$