Θέμα Α

Α1 –α , Α2 – δ , Α3 – δ , Α4 – γ , Α5 α – Λ, β – Λ , γ – Λ , δ – Σ , ε – Σ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Για τη συχνότητα της κάθε ταλάντωσης ισχύει $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f^2=\frac{1}{4\pi^2}\frac{k}{m}$ οπότε $f_1^2=\frac{1}{4\pi^2}\frac{k_1}{m}$ και $f_2^2=\frac{1}{4\pi^2}\frac{k_2}{m}$. Όταν το σώμα δένεται και με τα δύο ελατήρια εκτελεί ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D=k_1+k_2$ (με απόδειξη) οπότε:

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow f^2=\frac{1}{4\pi^2}\frac{D}{m}=\frac{1}{4\pi^2}\frac{k_1+k_2}{m}=\frac{1}{4\pi^2}\frac{k_1}{m}+\frac{1}{4\pi^2}\frac{k_2}{m} \Rightarrow f^2=f_1^2+f_2^2 \Rightarrow$$

$$f=\sqrt{f_1^2+f_2^2}=\sqrt{25+100}Hz=\sqrt{125}Hz \Rightarrow \boxed{f=5\sqrt{5}Hz}$$

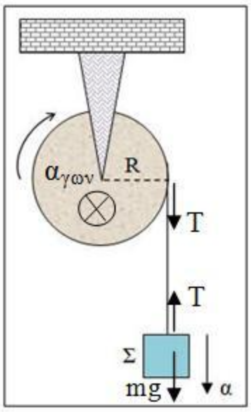
Β2. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Ισχύει $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau}=0 \rightarrow$ ΑΔΣ: $\vec{L}_{\alpha\rho\chi}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{L}_\delta+\vec{L}_m=\vec{L}'_\delta+\vec{L}'_m \Rightarrow I_\delta\omega+I_m\omega=I_\delta\omega'+I'_m\omega' \Rightarrow$

$$I_\delta\omega+mr^2\omega=I_\delta\frac{\omega}{3}+mR^2\frac{\omega}{3} \Rightarrow I_\delta+m\frac{R^2}{4}=I_\delta\frac{1}{3}+mR^2\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}I_\delta=\frac{1}{3}mR^2-\frac{1}{4}mR^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}I_\delta=\frac{1}{12}mR^2 \Rightarrow \boxed{I_\delta=\frac{1}{8}mR^2}$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (β).



Για τους ρυθμούς μεταβολής στροφορμής ισχύει:

Για τροχαλία: $\frac{dL_{\tau\rho o\chi}}{dt}=\Sigma\tau_{\tau\rho o\chi}=\tau_T=T\cdot R$

Για σύστημα: $\frac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt}=\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau}=\tau_{mg}=mg\cdot R$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μεταφορικής για το σώμα Σ έχουμε: $\Sigma F=ma \Rightarrow mg-T=m\frac{2}{3}g \Rightarrow mg-T=\frac{2}{3}mg \Rightarrow T=\frac{mg}{3}$

Οπότε: $\frac{dL_{\tau\rho o\chi}}{dt}\Big/\frac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt}=\frac{T\cdot R}{mg\cdot R}=\frac{mg/3}{mg}=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{dL_{\tau\rho o\chi}}{dt}\Big/\frac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt}=\frac{1}{3}}$

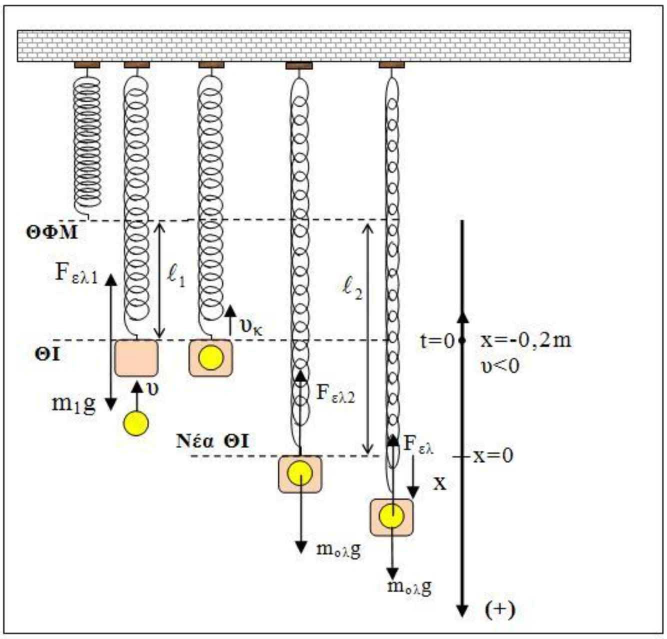
Θέμα Γ

Γ1. Πλαστική κρούση ΑΔΟ:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu}=\vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \vec{p}_2=\vec{p}_{\kappa o\iota\nu\acute{\eta}} \Rightarrow m_2\upsilon=m_{o\lambda}\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon_\kappa=\frac{m_2\upsilon}{m_{o\lambda}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\kappa=\sqrt{3}\frac{m}{s}}$$

Γ2. Στη ΘΙ ισχύει: $\Sigma F_1=0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda 1}=m_1g \Rightarrow k\ell_1=m_1g \Rightarrow \ell_1=\frac{m_1g}{k} \Rightarrow \ell_1=0,2m$

Στη Νέα ΘΙ ισχύει: $\Sigma F=0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda 2}=m_{o\lambda}g \Rightarrow k\ell_2=m_{o\lambda}g \Rightarrow \ell_2=\frac{m_{o\lambda}g}{k} \Rightarrow \ell_2=0,4m$



Εφαρμόζοντας ΑΔΕΤ αμέσως μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m_{o\lambda}\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

$$\xrightarrow{D=k} A = \sqrt{\frac{m_{o\lambda}}{k}\upsilon_\kappa^2 + x'^2}$$

όπου $|x| = \ell_2 - \ell_1 = 0,2m$

οπότε $A = \sqrt{\frac{2}{50}3 + \frac{4}{100}}m \Rightarrow \boxed{A = 0,4m}$

Για την εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα ισχύει:

$x = A\cdot\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ όπου

$$D = k = m_{o\lambda}\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_{o\lambda}}} = 5\frac{rad}{s}$$

και τη χρονική στιγμή $t=0$ $x=-0,2m$ με $\upsilon<0$ άρα

$$-0,2 = 0,4\cdot\eta\mu(5\cdot 0 + \varphi_o) \Rightarrow \eta\mu(\varphi_o) = -\frac{1}{2} = \eta\mu\frac{7\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_o = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \ (\upsilon<0)\ (1) \\ \varphi_o = 2\kappa\pi + \pi - \frac{7\pi}{6} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \ (\upsilon>0)(2) \end{cases}$$

από $(1) \xrightarrow{\kappa=0} \varphi_o = \frac{7\pi}{6}$ οπότε $\boxed{x = 0,4\cdot\eta\mu\left(5t + \frac{7\pi}{6}\right)\ S.I.}$

Γ3. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος υπολογίζεται από τον τύπο: $\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \Sigma F\cdot\upsilon = -Dx\cdot\upsilon = -kx\cdot\upsilon$. Το συσσωμάτωμα ξεκινώντας να εκτελεί ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t=0$ από τη θέση $x=-0,2m$ με αρνητική ταχύτητα $(\upsilon<0)$ ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας μηδενίζεται για πρώτη φορά στην ακραία θέση $x=-A=-0,4m$ όπου μηδενίζεται η ταχύτητα $(\upsilon=0)$, ενώ για δεύτερη φορά στη θέση ισορροπίας $(x=0)$ έχοντας θετική ταχύτητα $(\upsilon>0)$ Τη χρονική στιγμή θα την υπολογίσουμε ως εξής:

$$x = 0 \Rightarrow 0 = 0,4\cdot\eta\mu\left(5t + \frac{7\pi}{6}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(5t + \frac{7\pi}{6}\right) = \eta\mu 0 \Rightarrow \begin{cases} 5t + \frac{7\pi}{6} = 2\kappa\pi,\ \upsilon>0\ (1) \\ 5t + \frac{7\pi}{6} = 2\kappa\pi + \pi,\ \upsilon<0\ (2) \end{cases}$$

Από $(1) \Rightarrow 5t + \frac{7\pi}{6} = 2\kappa\pi \Rightarrow 5t = 2\kappa\pi - \frac{7\pi}{6} \Rightarrow\Rightarrow t = \frac{12\kappa\pi - 7\pi}{30}$

$\kappa = 0 \rightarrow t = \frac{-7\pi}{30}s < 0$, $\kappa = 1 \rightarrow t = \frac{5\pi}{30}s \Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{6}s}$

Γ4. Σε μια τυχαία θετική απομάκρυνση του άξονα της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα έχουμε:

$\Sigma F = -Dx \Rightarrow m_{o\lambda} g - F_{\varepsilon\lambda} = -kx \Rightarrow$

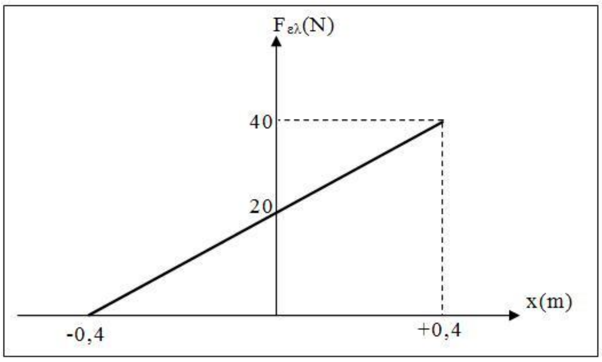
$F_{\varepsilon\lambda} = m_{o\lambda} g + kx \Rightarrow$

$\boxed{F_{\varepsilon\lambda} = 20 + 50x \ S.I. \ \text{με} \ -0,4m \le x \le +0,4m}$

$x = -0,4m \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 0$

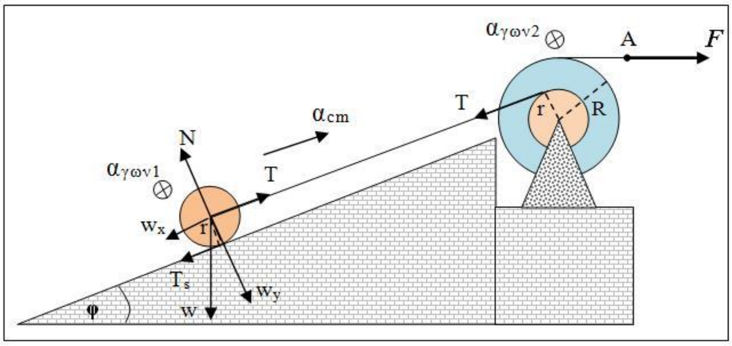
$x = 0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 20m$

$x = +0,4m \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 40N$



Θέμα Δ

Δ1. Εφαρμόζοντας τους θεμελιώδης νόμους για τον τροχό έχουμε:



ΘΝΜ: $\Sigma F_x = m a_{cm} \Rightarrow$

$T - w_x - T_S = m a_{cm}$ (1)

ΘΝΣ: $\Sigma \tau_1 = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu 1} \Rightarrow \tau_{T_S} = I a_{\gamma\omega\nu 1} \Rightarrow$

$T_S r = \frac{1}{2} m r^2 a_{\gamma\omega\nu 1} \Rightarrow T_S = \frac{1}{2} m r a_{\gamma\omega\nu 1}$

$\xrightarrow{a_{cm} = r a_{\gamma\omega\nu}} T_S = \frac{1}{2} m a_{cm}$ (2)

Από $(1)+(2) \Rightarrow T - w_x - T_S + T_S = m a_{cm} + \frac{1}{2} m a_{cm} \Rightarrow T - w_x = \frac{3}{2} m a_{cm} \Rightarrow$

$T = mg\eta\mu\varphi + \frac{3}{2} m a_{cm} \Rightarrow \boxed{T = 16N}$

Δ2. Στον άξονα $y'y$ για τον τροχό ισχύει: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_y = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Για τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής ισχύει: $T_{S\max} = \mu_S N = \mu_S mg\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Ο τροχός για κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πρέπει

$T_S \le T_{S\max} \Rightarrow T_S \le \mu_S mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \mu_S \ge \frac{T_S}{mg\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow$ από $(2) \Rightarrow T_S = \frac{1}{2} 2 \cdot 2N \Rightarrow T_S = 2N$

άρα $\mu_S \ge \frac{2}{\frac{20\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \mu_S \ge \frac{2}{10\sqrt{3}} \Rightarrow \mu_S \ge \frac{\sqrt{3}}{15} \rightarrow \boxed{\mu_{S\min} = \frac{\sqrt{3}}{15}}$

Δ3. Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο στροφικής για την τροχαλία έχουμε: ΘΝΣ: $\Sigma \tau_2 = I a_{\gamma\omega\nu 2} \Rightarrow \tau_F - \tau_T = I a_{\gamma\omega\nu 2} \Rightarrow FR - Tr = I a_{\gamma\omega\nu 2}$ (3)

<u>Σχέση επιταχύνσεων</u>

Το κέντρο μάζας του τροχού ανεβαίνει κατά x_{cm} τόσο, όσο νήμα τυλίγεται στην περιφέρεια ακτίνας r της τροχαλίας $\ell' = r\theta_2$, δηλαδή:

$x_{cm} = \ell' = r\theta_2 \xrightarrow{d/dt} \upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho(r)} = r\omega_2 \xrightarrow{d/dt} \alpha_{cm} = \alpha_{\varepsilon(r)} = r a_{\gamma\omega\nu 2}$

ή το κέντρο μάζας του τροχού έχει κάθε στιγμή κατά μέτρο την ίδια ταχύτητα και την ίδια επιτάχυνση με τα σημεία του νήματος και τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου ακτίνας r της διπλής τροχαλίας. Άρα $\upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho(r)} = r\omega_2$ και $\alpha_{cm} = \alpha_{\varepsilon(r)} = r a_{\gamma\omega\nu 2}$.

Οπότε: $\alpha_{\gamma\omega\nu 2} = \dfrac{\alpha_{cm}}{r} = 20\dfrac{rad}{s^2}$.

Από $(3) \Rightarrow F = \dfrac{Tr + Ia_{\gamma\omega\nu 2}}{R} = \dfrac{16\cdot 0,1 + 0,08\cdot 20}{0,2} N \Rightarrow \boxed{F = 16N}$

Δ4. Όταν έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $\ell = 8m$ από τον δίσκο ακτίνας R η διπλή τροχαλία έχει στραφεί κατά $\ell = R\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \dfrac{\ell}{R} = \dfrac{8}{0,2} rad \Rightarrow \theta_2 = 40 rad$.

Ισχύουν $\omega_2 = a_{\gamma\omega\nu 2} t$ και $\theta_2 = \dfrac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu 2} t^2$, με απαλοιφή του χρόνου έχουμε:

$$\theta_2 = \frac{\omega_2^2}{2a_{\gamma\omega\nu 2}} \Rightarrow \omega_2^2 = 2\theta_2 \cdot a_{\gamma\omega\nu 2} \Rightarrow \omega_2^2 = 1600 \Rightarrow \omega_2 = 40\frac{rad}{s}$$

Η στροφορμή της τροχαλίας είναι $L = I\cdot\omega_2 = 0,08\cdot 40 \dfrac{Kg\cdot m^2}{s} \Rightarrow \boxed{L = 3,2\dfrac{Kg\cdot m^2}{s}}$

Δ5. Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο στροφικής για την τροχαλία έχουμε:

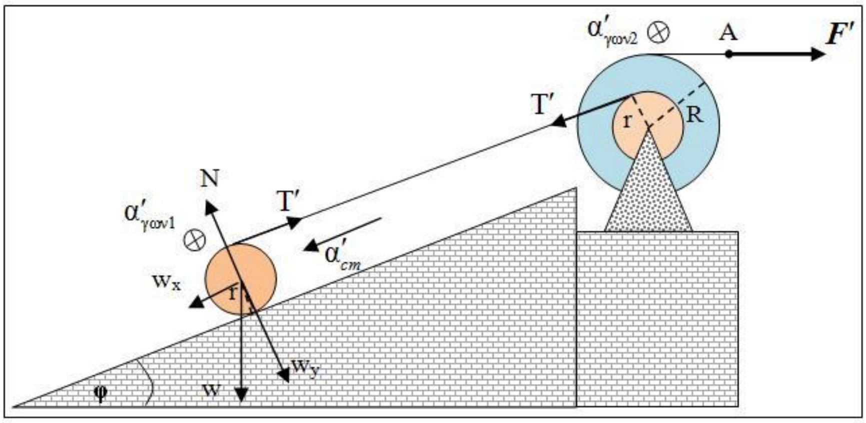
ΘΝΣ: $\Sigma\tau_2' = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$\tau_{F'} - \tau_{T'} = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$F'R - T'r = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$6\cdot 0,2 - 0,1\cdot T' = 0,08\cdot 10 \Rightarrow$

$T' = 4N$

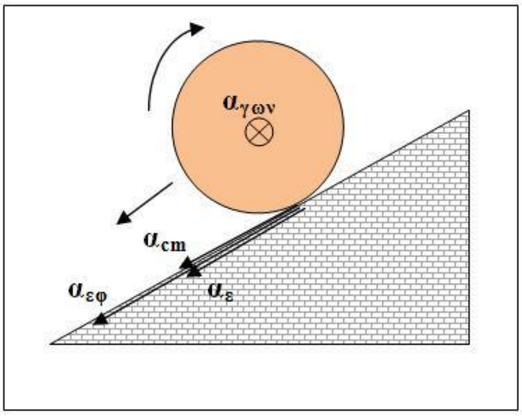


Συγκρίνοντας τις δυνάμεις που δέχεται ο τροχός $w_x = mg\eta\mu\varphi = 10N$ και $T' = 4N$, $w_x > T'$ θα κατεβαίνει το κεκλιμένο με επιτάχυνση που θα υπολογιστεί από τον ΘΝΜ:

$$\Sigma F_x' = ma_{cm}' \Rightarrow w_x - T' = ma_{cm}' \Rightarrow 10 - 4 = 2a_{cm}' \Rightarrow a_{cm}' = 3\frac{m}{s^2}.$$

Λόγω της ροπής της τάσης T' ο τροχός θα στρέφεται δεξιόστροφα.

Ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση (δεν είναι κύλιση χωρίς ολίσθηση) και η εφαπτομενική επιτάχυνση του σημείου της περιφέρειας που είναι σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο θα υπολογιστεί από το διανυσματικό άθροισμα της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας και της επιτρόχιας επιτάχυνσης των σημείων της περιφέρειας :



$\vec{a}_{\varepsilon\varphi} = \vec{a}_{cn}' + \vec{a}_{\varepsilon} \Rightarrow$

$$a_{\varepsilon\varphi} = a_{cn}' + a_{\varepsilon} = a_{cn}' + r\cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\varepsilon\varphi} = (3 + 0,1\cdot 40)\frac{m}{s^2} \Rightarrow \boxed{a_{\varepsilon\varphi} = 7\frac{m}{s^2}}$$