Θέμα Α

Α1 –δ , Α2 – δ , Α3 – β , Α4 – γ , Α5 α – Λ, β – Σ , γ – Σ , δ – Σ , ε – Σ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η ροπή αδράνειας μεταβάλλεται κατά 75% οπότε $I_{τελ}=\frac{I_{αρχ}}{4}$. Η στροφορμή του συστήματος διατηρείται αφού $\Sigma\tau_{εξ}=0 \to \vec{L}_{αρχ}=\vec{L}_{τελ}$. Ισχύει για την κινητική ενέργεια στροφικής κίνησης και την στροφορμή ο τύπος $K_{στρφ}=\frac{L^2}{2\cdot I}$, οπότε:

$$\frac{K_{ολ,τελ}}{K_{ολ,αρχ}}=\frac{L_{τελ}^2/2\cdot I_{τελ}}{L_{αρχ}^2/2\cdot I_{αρχ}}=\frac{I_{αρχ}}{I_{τελ}}=\frac{I_{αρχ}}{I_{αρχ}/4}=4$$

Β2. i) Σωστή απάντηση είναι η (β).

Από το διάγραμμα $\frac{3T}{4}=0,3s \Rightarrow T=0,4s \to \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0,4}\Rightarrow \omega=5\pi\frac{rad}{s}$

Για την πρώτη ταλάντωση: $A_1=0,4m,\ \varphi_{01}=0$

άρα $x_1=A_1\cdot \eta\mu(\omega t+\varphi_{01})\Rightarrow x_1=0,4\cdot\eta\mu(5\pi t)\,S.I.$

Για τη δεύτερη ταλάντωση: $A_2=0,15m,\ \varphi_{02}=\pi\,rad$ άρα

$x_2=A_2\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_{02})\Rightarrow x_2=0,15\cdot\eta\mu(5\pi t+\pi)\ S.I.$

ii) Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Για τη συνισταμένη ταλάντωση ισχύει: $x=A_{ολ}\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ όπου

$A_{ολ}=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi}$ με $\Delta\varphi=\varphi_{02}-\varphi_{01}=\pi\,rad$ άρα $\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi=-1$

$A_{ολ}=\sqrt{A_1^2+A_2^2-2A_1A_2}=|A_1-A_2|\Rightarrow A_{ολ}=0,25m$ και επειδή $A_1>A_2\to\varphi_0=0$

τελικά $x=0,25\cdot\eta\mu(5\pi t)\,S.I.$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Στην περίπτωση Ι ισχύει $\vec{\upsilon}_1'\uparrow\uparrow\vec{\upsilon}_1$ άρα

$$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_0\Rightarrow\frac{\upsilon_0}{2}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_0\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\Rightarrow m_1+m_2=2m_1-2m_2\Rightarrow m_1=3m_2$$

και $\upsilon_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_0=\frac{6m_2}{3m_2+m_2}\upsilon_0\Rightarrow\upsilon_2'=\frac{3\upsilon_0}{2}$

Επειδή το σώμα m_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ισχύει $\upsilon_2'=\upsilon_{\max}'=\omega A_1$

Στην περίπτωση Ι ισχύει $\vec{\upsilon}_3'\uparrow\downarrow\vec{\upsilon}_1$ άρα

$$\upsilon_3'=\frac{m_3-m_2}{m_3+m_2}\upsilon_0\Rightarrow-\frac{\upsilon_0}{2}=\frac{m_3-m_2}{m_3+m_2}\upsilon_0\Rightarrow-\frac{1}{2}=\frac{m_3-m_2}{m_3+m_2}\Rightarrow-m_3-m_2=2m_3-2m_2\Rightarrow m_2=3m_3$$

και $\upsilon_2''=\frac{2m_3}{m_3+m_2}\upsilon_0=\frac{2m_3}{m_3+3m_3}\upsilon_0\Rightarrow\upsilon_2''=\frac{\upsilon_0}{2}$

Επειδή το σώμα m_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ισχύει $\upsilon_2''=\upsilon_{\max}''=\omega A_2$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{\upsilon_2'}{\upsilon_2''}=\frac{\omega A_1}{\omega A_2}\Rightarrow\frac{3\upsilon_0/2}{\upsilon_0/2}=\frac{A_1}{A_2}\Rightarrow\boxed{\frac{A_1}{A_2}=3}$$

Θέμα Γ

Γ1. Από την εξίσωση της θέσης $x=0$, $y=A\cdot\eta\mu(5\pi t)S.I.$ έχουμε:

$$\omega=5\pi\frac{rad}{s}\Rightarrow 2\pi f=5\pi\frac{rad}{s}\Rightarrow f=2,5Hz\Rightarrow\frac{1}{T}=2,5\Rightarrow T=0,4s$$

Από το διάγραμμα έχουμε: $A=0,4m$ και $\frac{9\lambda}{4}=0,9m=x_K\Rightarrow\lambda=0,4m$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι: $\upsilon=\lambda f=0,4\cdot2,5\frac{m}{s}\Rightarrow\boxed{\upsilon=1\frac{m}{s}}$

Γ2. Το κύμα φτάνει στο σημείο Κ στη θέση $x_K=0,9m$ τη χρονική στιγμή t_1 άρα:

$$\upsilon=\frac{x_K}{t_1}\Rightarrow t_1=\frac{x_K}{\upsilon}=\frac{0,9}{1}s\Rightarrow\boxed{t_1=0,9s}$$

Γ3. Η εξίσωση της επιτάχυνσης ταλάντωσης των σημείων της χορδής είναι:

$$a=-a_{\max}\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\Rightarrow \text{ όπου } a_{\max}=\omega^2A=25\pi^2\cdot0,4\frac{m}{s^2}\Rightarrow a_{\max}=100\frac{m}{s^2}$$

$$a=-100\cdot\eta\mu\left(5\pi t-\frac{2\pi x}{0,4}\right)\Rightarrow\boxed{a=-100\cdot\eta\mu(5\pi t-5\pi x)S.I.}$$

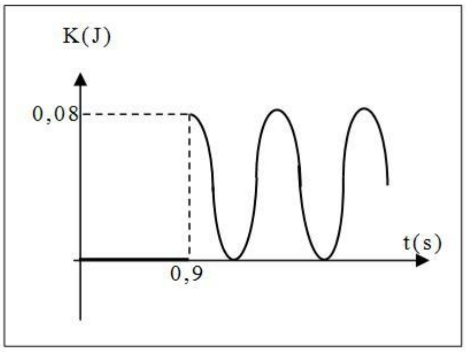
Γ4. Η εξίσωση της κινητικής ενέργειας ταλάντωσης του σημείου Κ σε συνάρτηση με το χρόνο είναι: $K=\frac{1}{2}m\upsilon_K^2=\frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right)\Rightarrow$

όπου $\upsilon_{\max}=\omega A=5\pi\cdot0,4\frac{m}{s}=2\pi\frac{m}{s}$,

$$K=\frac{1}{2}4\cdot10^{-3}4\pi^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\left(5\pi t-\frac{2\pi\cdot0,9}{0,4}\right)\Rightarrow$$

$\boxed{K=8\cdot10^{-2}\cdot\sigma\upsilon\nu^2(5\pi t-4,5\pi)\ S.I.}$ για $t\geq0,9s$

(το κύμα φτάνει στο σημείο Κ στη θέση $x_K=0,9m$ τη χρονική στιγμή $t_1=0,9s$). Η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ5. Τα δύο πλησιέστερα σημεία στο σημείο Κ που τη χρονική στιγμή $t_1=0,9s$ έχουν επιτάχυνση $a=-\frac{a_{\max}}{2}$ θα βρεθούν από τη λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης:

$$a=-\frac{a_{\max}}{2}\Rightarrow-100\cdot\eta\mu(5\pi\cdot0,9-5\pi x)=-50\Rightarrow\eta\mu(4,5\pi-5\pi x)=\frac{1}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4,5\pi-5\pi x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{26-12\kappa}{30} & (1)\\ 4,5\pi-5\pi x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{22-12\kappa}{30} & (2)\end{cases}$$

Η θέση του σημείου Κ είναι η $x_K=0,9m=\frac{9}{10}m=\frac{27}{30}m$. Τα δύο πλησιέστερα σημεία στο σημείο Κ προκύπτουν:

Από τις λύσεις (1) για $\kappa=0\rightarrow x=\frac{26}{30}m$ και από τις λύσεις (2) για $\kappa=0\rightarrow x=\frac{22}{30}m$

Άρα $\Delta\Phi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x=\frac{2\pi}{0,4}\left(\frac{26}{30}-\frac{22}{30}\right)=\frac{2\pi}{0,4}\frac{4}{30}\Rightarrow\boxed{\Delta\Phi=\frac{2\pi}{3}rad}$

Θέμα Δ

Δ1. Στον κύλινδρο ασκούνται το βάρος του $m\vec{g}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$.
Εφαρμόζοντας τους θεμελιώδεις νόμους έχουμε:
ΘΝΜ: $\Sigma F = ma_{cm} \Rightarrow mg - T = ma_{cm}$ (1)

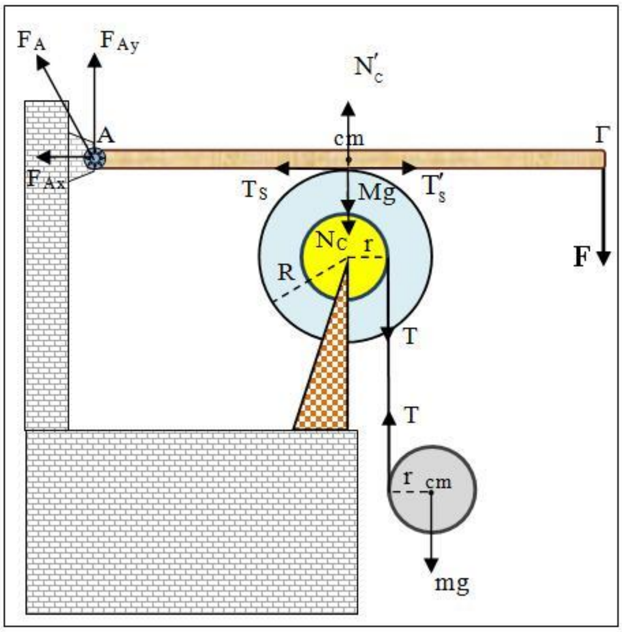
ΘΝΣ: $\Sigma\tau = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T\cdot r = \frac{1}{2}mr^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$T = \frac{1}{2}mr\cdot a_{\gamma\omega\nu} \xrightarrow{a_{cm}=r\cdot a_{\gamma\omega\nu}} T = \frac{1}{2}ma_{cm}$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει:

$mg - T + T = ma_{cm} + \frac{1}{2}ma_{cm} \Rightarrow$

$mg = \frac{3}{2}ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2g}{3} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{20}{3}\frac{m}{s^2}}$



Δ2. Τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $1,2m$ από την περιφέρεια του κυλίνδρου, το κέντρο μάζας του έχει κατέβει κατά $y_{cm} = 1,2m$.

Αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή: $y_{cm} = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_{cm}}{a_{cm}}} \Rightarrow t = 0,6s$.

Τότε η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι: $\upsilon_{cm} = a_{cm}t = \frac{20}{3}0,6\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_{cm} = 4\frac{m}{s}$

οπότε η γωνιακή του ταχύτητα είναι: $\upsilon_{cm} = r\cdot\omega \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_{cm}}{r} \Rightarrow \omega = 40\frac{rad}{s}$.

Η στροφορμή του κυλίνδρου ως προς το κέντρο μάζας του εκείνη τη στιγμή υπολογίζεται από τον τύπο $L = I_{cm}\omega = \frac{1}{2}mr^2\omega = \frac{1}{2}2\frac{1}{100}40\frac{Kg\cdot m^2}{s} \Rightarrow \boxed{L = 0,4\frac{Kg\cdot m^2}{s}}$

Δ3. Η διπλή τροχαλία δέχεται την τάση του νήματος $\vec{T}$, την κάθετη δύναμη $\vec{N}_C$ από τη δοκό, τη στατική τριβή $\vec{T}_S$ από τη δοκό, το βάρος της και τη δύναμη από το σημείο στήριξης. Η δοκός ισορροπεί στην οριζόντια θέση και δέχεται τη δύναμη $\vec{F}$, το βάρος της $M\vec{g}$, την κάθετη δύναμη $\vec{N}_C'$ και τη στατική τριβή $\vec{T}_S'$ από τη διπλή τροχαλία και τη δύναμη $\vec{F}_A$ από την άρθρωση. Από τη σχέση (2) υπολογίζουμε την τάση του νήματος: $(2) \Rightarrow T = \frac{1}{2}ma_{cm} = \frac{1}{2}2\cdot\frac{20}{3}N \Rightarrow T = \frac{20}{3}N$.

Η διπλή τροχαλία δε στρέφεται άρα ισχύει

$\Sigma\tau_{\tau\rho o\chi} = 0 \Rightarrow \tau_{Ts} - \tau_T = 0 \Rightarrow \tau_{Ts} = \tau_T \Rightarrow T_S R = Tr \Rightarrow T_S = \frac{T}{2} \Rightarrow T_S = \frac{10}{3}N$

Η δοκός ισορροπεί οπότε:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_S' = F_{Ax}$ (3)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} + N_C' = F + Mg$ (4)

$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow \tau_{N'} - \tau_{Mg} - \tau_F = 0 \Rightarrow N_C'\frac{\ell}{2} - Mg\frac{\ell}{2} - F\cdot\ell = 0 \Rightarrow N_C' = Mg + 2F \Rightarrow N_C' = 20N$

Όμως κατά μέτρο $N_C = N_C' = 20N$ αφού είναι ζεύγος δράσης αντίδρασης.

Η διπλή τροχαλία ισορροπεί οριακά άρα $T_S = \frac{10}{3} N = T_{S\max}$

Για τον συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ δοκού και διπλής τροχαλίας στην οριακή ισορροπία ισχύει: $T_{S\max} = \mu_S N_C \Rightarrow \mu_S = \frac{T_{S\max}}{N_C} = \frac{10/3}{20} \Rightarrow \boxed{\mu_S = \frac{1}{6}}$

Δ4. Για τη στατική τριβή μεταξύ δοκού και διπλής τροχαλίας ισχύει $T'_S = T_S = \frac{10}{3} N$ κατά μέτρο αφού είναι ζεύγος δράσης αντίδρασης.

Από τη σχέση (3) προκύπτει $F_{Ax} = T'_S = \frac{10}{3} N$

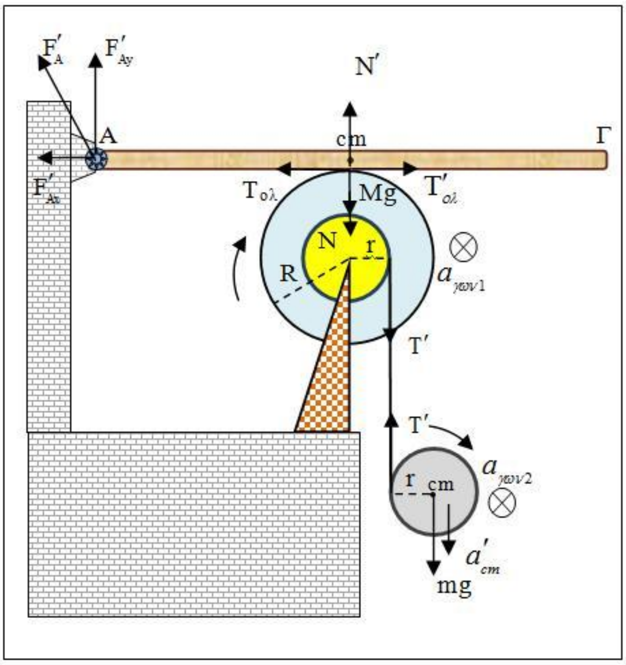
Από τη σχέση (4) προκύπτει $F_{Ay} = F + Mg - N'_C = (4+12-20)N \Rightarrow F_{Ay} = -4N$

($F_{Ay} < 0$ σημαίνει ότι έχει αντίθετη φορά από αυτή που έχει σχεδιαστεί στο σχήμα).

Για το μέτρο της δύναμης που δέχεται η δοκός από την άρθρωση ισχύει:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{\frac{100}{9} + 16N} = \sqrt{\frac{244}{9}} N \Rightarrow \boxed{F_A = \frac{\sqrt{244}}{3} N}$$

Δ5. Όταν καταργείται η δύναμη $\vec{F}$ το σύστημα διπλή τροχαλία - κύλινδρος αρχίζει να κινείται και η δοκός ισορροπεί οριζόντια. Για τη δοκό ισχύει:



$$\Sigma\tau'_A = 0 \Rightarrow \tau_{N'} - \tau_{Mg} = 0 \Rightarrow$$

$$N' \frac{\ell}{2} = Mg \frac{\ell}{2} \Rightarrow N' = Mg = 12N$$

Η διπλή τροχαλία στρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{\gamma\omega\nu 1}$, υπό την επίδραση της τάσης νήματος T' και της τριβής ολίσθησης $\vec{T}_{o\lambda}$ για την οποία ισχύει:

$$T_{o\lambda} = \mu \cdot \mathrm{N} \text{ με } \mu = \mu_S = \frac{1}{6} \text{ και } \mathrm{N} = \mathrm{N}' = 12N$$

$$\Rightarrow T_{o\lambda} = \frac{1}{6} \cdot 12N \Rightarrow T_{o\lambda} = 2N.$$

Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση υπό την επίδραση του βάρους του $m\vec{g}$ και της τάσης νήματος T' έχοντας επιτάχυνση $\vec{a}'_{cm}$ και γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{\gamma\omega\nu 2}$.

Για τη σχέση των μέτρων των επιταχύνσεων ισχύει: $a'_{cm} = r \cdot a_{\gamma\omega\nu 2} + r \cdot a_{\gamma\omega\nu 1}$ (5)

Εξήγηση: το κέντρο μάζας του κυλίνδρου κατεβαίνει κατά y'_{cm} λόγω του ξετυλίγματος του νήματος κατά $r\theta_2$ από την περιφέρειά του και λόγω του ξετυλίγματος του νήματος κατά $r\theta_1$ από την περιφέρεια του μικρού δίσκου της διπλής τροχαλίας, οπότε ισχύει

$$y'_{cm} = r\theta_2 + r\theta_1 \xrightarrow{d/dt} \upsilon'_{cm} = r\omega_2 + r\omega_1 \xrightarrow{d/dt} a'_{cm} = r \cdot a_{\gamma\omega\nu 2} + r \cdot a_{\gamma\omega\nu 1}$$

Εφαρμόζοντας τους θεμελιώδεις νόμους για κάθε σώμα έχουμε:

Για τροχαλία ΘΝΣ: $\Sigma\tau'_{\tau\rho o\chi} = I \cdot a_{\gamma\omega\nu 1} \Rightarrow \tau_{T'} - \tau_{T_{o\lambda}} = I \cdot a_{\gamma\omega\nu 1} \Rightarrow T'r - T_{o\lambda}R = I \cdot a_{\gamma\omega\nu 1}$

$$\xrightarrow{\varepsilon\pi\acute{\iota}\ r} T'r^2 - T_{o\lambda}R\cdot r = I \cdot ra_{\gamma\omega\nu 1} \Rightarrow ra_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{r^2}{I}T' - \frac{R\cdot r}{I}T_{o\lambda} \quad (6)$$

Για κύλινδρο ΘΝΜ: $\Sigma F' = ma_{cm} \Rightarrow mg - T' = ma'_{cm} \Rightarrow a'_{cm} = g - \frac{T'}{m}$ (7)

ΘΝΣ: $\Sigma\tau' = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu 2} \Rightarrow T'\cdot r = \frac{1}{2}mr^2 a_{\gamma\omega\nu_2} \Rightarrow T' = \frac{1}{2}mra_{\gamma\omega\nu_2} \Rightarrow ra_{\gamma\omega\nu_2} = \frac{2T'}{m}$ (8)

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5) των επιταχύνσεων τις σχέσεις (6), (7), (8) προκύπτει:

$$g - \frac{T'}{m} = \frac{r^2}{I}T' - \frac{R\cdot r}{I}T_{o\lambda} + \frac{2T'}{m} \Rightarrow 10 - \frac{T'}{2} = \frac{0,01}{0,02}T' - \frac{0,02}{0,02}2 + \frac{2T'}{2} \Rightarrow$$

$$10 - \frac{T'}{2} = \frac{T'}{2} - 2 + T' \Rightarrow 2T' = 12 \Rightarrow T' = 6N$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας είναι:

$$\frac{dL_{\tau\rho o\chi}}{dt} = \Sigma\tau'_{\tau\rho o\chi} = T'r - T_{o\lambda}R \Rightarrow \boxed{\frac{dL_{\tau\rho o\chi}}{dt} = 0,2Nm}$$