ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ (30-9-2017)

ΘΕΜΑ 1ο

Α) 1. ΣΩΣΤΟ 2. ΛΑΘΟΣ 3. ΣΩΣΤΟ 4. ΣΩΣΤΟ 5. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

1. Για $x<0$: $f(x)=\eta\mu x$ οπότε $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$

Για $x>0$: $f(x)=x^2+x$ οπότε $f'(x)=2x+1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x-0}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+x-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$

$\Rightarrow f'(0)=1$

$f'(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x, & x\le 0\\ 2x+1, & x>0\end{cases}$

2. Για $x\le 0$: $\begin{cases} f(x)=\eta\mu x \\ g(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}\end{cases}$

$A_{g\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\}=\{x\le 0 \,/\, \eta\mu x\in\mathbb{R}\}=(-\infty,0]\ne\emptyset$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\eta\mu^2 x$.

3. $h(x)=\eta\mu^2 x$ τότε $h'(x)=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ και $h''(x)=2\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu^2 x$

$h''(x)+4h(x)=2\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu^2 x+4\eta\mu^2 x=2\sigma\upsilon\nu^2 x+2\eta\mu^2 x=2(\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x)=2.$

4. Για $x>0$: $f(x)=x^2+x$, $f'(x)=2x+1>0$ για $x>0$ οπότε η $f\uparrow$ άρα και "1-1"

$f\left(\frac{2}{3}x^5+f^{-1}(f(e^x))\right)=2 \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}x^5+e^x\right)=2 \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}x^5+e^x\right)=f(1)$

$\overset{f\ 1-1}{\Longleftrightarrow}\ \frac{2}{3}x^5+e^x=1 \Leftrightarrow 2x^5+3e^x=3.\ (\mathrm{I})$

Έστω $K(x)=2x^5+3e^x-3,\ x\in\mathbb{R}$

$K'(x)=10x^4+3e^x>0$ οπότε η $K(x)\uparrow$ άρα η $K(x)$ "1-1"

Η ζητούμενη εξίσωση $(\mathrm{I})\Rightarrow K(x)=0 \Leftrightarrow K(x)=K(0) \overset{K\ "1-1"}{\Longleftrightarrow} \boxed{x=0}$

ΘΕΜΑ 3º

1. Έστω $x_1, x_2 > 0$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1^2-1}{2x_1} = \frac{x_2^2-1}{2x_2} \Leftrightarrow x_1^2 2x_2 - 2x_2 = x_2^2 2x_1 - 2x_1$

$\Leftrightarrow 2x_1^2x_2 - 2x_2^2x_1 - 2x_2 + 2x_1 = 0 \Leftrightarrow 2x_1x_2(x_1-x_2) + 2(x_1-x_2) = 0$

$\Leftrightarrow (2x_1x_2+2)(x_1-x_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1 = x_2} \\ \text{ή} \\ x_1x_2 = -1 \text{ Αδύνατο αφού } x>0 \end{cases}$

Άρα η f "1-1"

Έστω $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2x} = y \Leftrightarrow x^2-1 = 2xy \Leftrightarrow x^2-2xy-1=0$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 = 1+y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 1+y^2 \Leftrightarrow |x-y| = \sqrt{1+y^2}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x = \sqrt{1+y^2}+y \\ \text{ή} \\ x = -\sqrt{1+y^2}+y \end{cases}\right\rangle y \in \mathbb{R}$

Από υπόθεση $x>0$ οπότε:

- Αν $x=\sqrt{1+y^2}+y$ πρέπει $\sqrt{1+y^2}+y>0$

όμως $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = |y| \geq -y \Leftrightarrow \sqrt{1+y^2}+y > 0$ οπότε η περίπτωση

$\boxed{x = \sqrt{1+y^2}+y}$ (1) είναι δεκτή.

- Αν $x=-\sqrt{1+y^2}+y$ πρέπει $-\sqrt{1+y^2}+y>0$

όμως $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = |y| \geq y \Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} > y \Leftrightarrow y-\sqrt{1+y^2} < 0$

άρα η περίπτωση $x=-\sqrt{1+y^2}+y$ απορρίπτεται.

Έτσι $f(x)=y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y) = \sqrt{1+y^2}+y$ με $y \in \mathbb{R}$

ή $\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x^2+1}+x \text{ με } x \in \mathbb{R}}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$

Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = +\infty$

3. $g(x)=2^x+x$ οπότε $g'(x)=2^x\ln 2+1>0$ άρα η $g\nearrow$ οπότε g "1-1"

$2^{3x-2}-2^{x^2}=x^2-3x+2 \Leftrightarrow 2^{3x-2}+3x-2=2^{x^2}+x^2$

$\Leftrightarrow g(3x-2)=g(x^2) \overset{g\text{ "1-1"}}{\Longleftrightarrow} 3x-2=x^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x=2 \end{cases}$

4. Αφού οι συναρτήσεις g και g^{-1} είναι παραγωγίσιμες ισχύει

$g^{-1}(g(x))=x$ οπότε $(g^{-1})'(g(x))\cdot g'(x)=1$ (2)

Επειδή $g(1)=3$ θέτουμε στη (2) όπου $x=1$: $(g^{-1})'(g(1))\cdot g'(1)=1 \Leftrightarrow$

$(g^{-1})'(3)\cdot(2\ln 2+1)=1 \Leftrightarrow \boxed{(g^{-1})'(3)=\dfrac{1}{2\ln 2+1}}$ (3)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$ (4)

οπότε η ζητούμενη ανίσωση:

$g^{-1}\left(g(e^x-5)-6\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\right)>(g^{-1})'(3)\cdot(2\ln 2+1)$

$\overset{(3)}{\underset{(4)}{\Longleftrightarrow}} g^{-1}\left(g(e^x-5)-6\dfrac{1}{2}\right)>1 \Leftrightarrow g^{-1}(g(e^x-5)-3)>1$

$\overset{g\nearrow}{\Longleftrightarrow} g(e^x-5)-3>g(1) \Leftrightarrow g(e^x-5)>6 \Leftrightarrow g(e^x-5)>g(2)$

$\overset{g\nearrow}{\Longleftrightarrow} e^x-5>2 \Leftrightarrow e^x>7 \Leftrightarrow \boxed{x>\ln 7}$

ΘΕΜΑ 4ο:

1. Ισχύει $|f(x)-x| \leq \epsilon\varphi^3 x \xrightarrow{x=0} |f(0)| \leq 0$ Άρα $f(0)=0$

οπότε για $0<2$ ισχύει $f(0)<f(2)$ και από υπόθεση η f γνησίως μονότονη άρα η f γν. αύξουσα.

2. Το ζητούμενο όριο: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$

Απο υπόθεση $|f(x)-x| \leq \epsilon\varphi^2 x \xLeftrightarrow{x\neq 0} \frac{|f(x)-x|}{|x|} \leq \frac{\epsilon\varphi^2 x}{|x|} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\frac{f(x)}{x} - 1\right| \leq \frac{|\epsilon\varphi^2 x|}{|x|} \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)}{x} - 1\right| \leq \left|\frac{\epsilon\varphi^2 x}{x}\right|$

$\Leftrightarrow -\left|\frac{\epsilon\varphi^2 x}{x}\right| \leq \frac{f(x)}{x} - 1 \leq \left|\frac{\epsilon\varphi^2 x}{x}\right| \Leftrightarrow \boxed{1 - \left|\frac{\epsilon\varphi^2 x}{x}\right| \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \left|\frac{\epsilon\varphi^2 x}{x}\right|}$

• $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\epsilon\varphi^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) = 1 \cdot 0 = 0$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 - \left|\frac{\epsilon\varphi^2 x}{x}\right|\right) = 1 = \lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \left|\frac{\epsilon\varphi^2 x}{x}\right|\right)$

Απο κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ άρα $f'(0)=1$

3. i) • $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\ln(e^{x+2}-1) - x\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln(e^{x+2}-1) - \ln e^x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \ln \frac{e^{x+2}-1}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{e^{x+2}}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(e^2 - \frac{1}{e^x}\right) = \ln(e^2) = 2$

Αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Έτσι $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\ln(e^{x+2}+1) - x\right) \xrightarrow[\text{Το } u\to 2]{u = \ln(e^{x+2}+1) - x} \lim\limits_{u\to 2} f(u) \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} f(2) = 3$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^{x+1}+2^x}{3^x-2^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\cdot 3^x+2^x}{3^x-2^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{3^x}(3+(\frac{2}{3})^x)}{\cancel{3^x}(1-(\frac{2}{3})^x)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+(\frac{2}{3})^x}{1-(\frac{2}{3})^x} = 3$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$ για $\alpha\in(0,1)$

Έτσι $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}\left(\dfrac{3^{x+1}+2^x}{3^x-2^x}\right) \xrightarrow[\text{Το } u\to 3]{u=\frac{3^{x+1}+2^x}{3^x-2^x}} \lim\limits_{u\to 3} f^{-1}(u) \xrightarrow{f^{-1} \text{ συνεχής}} f^{-1}(3)=2$

Άρα το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 6.

ii) Η ζητούμενη ανίσωση:

$$f(x^7+2) - f^{-1}(1-e^{7x}) > 3 \quad (*)$$

Έστω $K(x) = f(x^7+2) - f^{-1}(1-e^{7x})$, $x\in\mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\begin{cases} x_1^7 < x_2^7 \Leftrightarrow x_1^7+2 < x_2^7+2 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \boxed{f(x_1^7+2) < f(x_2^7+2)} \quad (1) \\ 7x_1 < 7x_2 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} e^{7x_1} < e^{7x_2} \Leftrightarrow -e^{7x_1} > -e^{7x_2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1-e^{7x_1} > 1-e^{7x_2} \overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow} \quad (**)$

$\Leftrightarrow f^{-1}(1-e^{7x_1}) > f^{-1}(1-e^{7x_2}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{-f^{-1}(1-e^{7x_1}) < -f^{-1}(1-e^{7x_2})} \quad (2)$

Από (1) + (2) $\Rightarrow K(x_1) < K(x_2)$ άρα η $K(x)$ ↑

Η (*) $\Rightarrow K(x) > 3 \Leftrightarrow K(x) > K(0) \overset{K(x)\uparrow}{\Leftrightarrow} \boxed{x>0}$

(**) → όταν η f ↑ και η f^{-1} ↑ (με απόδειξη)