

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 30 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017

ΘΕΜΑ 1^ο

- A)** Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. **(7μ)**
- B)** Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = a^x$ με $0 < a \neq 1$ και να γίνει απόδειξη. **(4μ)**
- Γ)** Πότε μια συνάρτηση f καλείται παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της ; **(4μ)**
- Δ)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

1. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
2. Αν $f(5) = 13$ και η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε $f'(5) = 0$.
3. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 τότε ισχύει $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
4. Αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0 .
5. Αν η $f(x) = \sqrt[3]{x}$ τότε η παράγωγος είναι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$. **(10μ)**

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν :

- $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$
- $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f . **(8μ)**
2. Να βρείτε την σύνθεση της συνάρτησης f για $x \leq 0$ με την συνάρτηση g για $x \in \mathbb{R}$. **(3μ)**
3. Αν $h(x) = g(f(x))$ για $x \leq 0$ να αποδείξετε ότι $h''(x) + 4h(x) = 2$. **(7μ)**
4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 για $x > 0$ και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $f\left(\frac{2}{3}x^5 + f^{-1}(f(e^x))\right) = 2$. **(2+5μ)**

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
 Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
 Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
 www.en-dynamei.gr



ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g όπου $f(x) = \frac{x^2-1}{2x}$, $x > 0$ και $g(x) = 2^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και η αντίστροφη είναι $f^{-1}(x) = x + \sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. (4+4μ)

2. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$. (4μ)

3. Να αποδείξετε ότι η $g(x)$ είναι «ένα προς ένα» συνάρτηση και να λυθεί η εξίσωση :

$$2^{3x-2} - 2^{x^2} = x^2 - 3x + 2. \quad (2+5\mu)$$

4. Αν για την αντίστροφη συνάρτηση της g ισχύουν ότι $g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ότι είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$

τότε να λύσετε την ανίσωση $g^{-1}\left(g(e^x - 5) - 6 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}\right) > (g^{-1})'(3) \cdot (2 \ln 2 + 1)$. (6μ)

ΘΕΜΑ 4^ο



Δίνεται πραγματική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $|f(x) - x| \leq \varepsilon \varphi^2 x$ για κάθε $x \in (-\pi^{-7}, \pi^{-7})$.
- Η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη με $f(2) = 3$

1. Να βρεθεί το $f(0)$ και η μονοτονία της συνάρτησης. (1+2μ)

2. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$. (10μ)

3. Αν είναι γνωστό ότι η f και η αντίστροφη της είναι συνεχείς στο \mathbb{R} τότε :

i) Να βρεθεί το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(\ln(e^{x+2} + 1)) - x \right) \cdot f^{-1}\left(\frac{3^{x+1} + 2^x}{3^x - 2^x}\right)$. (8μ)

ii) Να λυθεί η ανίσωση : $f(x^7 + 2) > f^{-1}(1 - e^{7x}) + 3$. (4μ)

...ΕΥΧΟΜΕΘΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑ...

