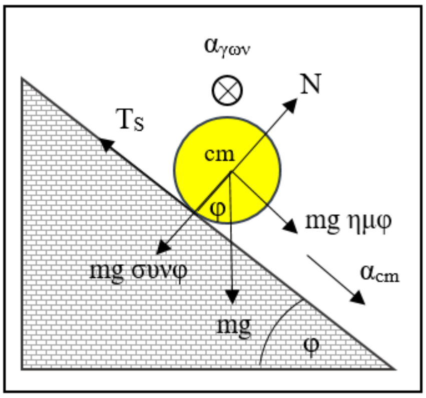
Θέμα Α

Α1 –δ , Α2 – α , Α3 – γ , Α4 – β , Α5 α – Λ, β – Λ , γ – Λ , δ – Σ , ε – Λ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η ροπή αδράνειας και για τα δύο στερεά σώματα μπορεί να πάρει τη μορφή $I = \lambda \cdot mR^2$ όπου λ καθαρός αριθμός που για τον κύλινδρο έχει τιμή $\lambda_{\kappa\upsilon\lambda} = \frac{1}{2} = 0,5$ και για τη συμπαγή σφαίρα $\lambda_{\sigma\varphi} = \frac{2}{5} = 0,4$.Εφαρμόζοντας τους θεμελιώδεις νόμους για τα δύο στερεά σώματα έχουμε:



ΘΝΜ $\rightarrow \Sigma F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg \cdot \eta\mu\varphi - T_S = m\alpha_{cm}$ (1)

ΘΝΣ $\rightarrow \Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu 2} \Rightarrow \tau_{T_S} = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$T_S R = \lambda \cdot mR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_S = \lambda \cdot mR\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$ όπου $\alpha_{cm} = R\alpha_{\gamma\omega\nu}$

$T_S = \lambda \cdot m\alpha_{cm}$ (2)

$$(1)+(2) \Rightarrow mg \cdot \eta\mu\varphi - T_S + T_S = m\alpha_{cm} + \lambda \cdot m\alpha_{cm} \Rightarrow mg \cdot \eta\mu\varphi = m\alpha_{cm}(1+\lambda) \Rightarrow$$

$$mg \cdot \eta\mu\varphi = m\alpha_{cm}(1+\lambda) \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{g \cdot \eta\mu\varphi}{1+\lambda}$$

(η επιτάχυνση είναι ανεξάρτητη από τη μάζα και την ακτίνα του κάθε στερεού σώματος)

Συγκρίνοντας έχουμε: $\lambda_{\kappa\upsilon\lambda} > \lambda_{\sigma\varphi} \rightarrow \alpha_{cm,\kappa\upsilon\lambda} < \alpha_{cm,\sigma\varphi}$

Τα στερεά όταν φτάνουν στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου έχουν διανύσει την ίδια απόσταση άρα:

$x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x_{cm}}{\alpha_{cm}}}$, αφού $\alpha_{cm,\kappa\upsilon\lambda} < \alpha_{cm,\sigma\varphi} \rightarrow t_{\kappa\upsilon\lambda} > t_{\sigma\varphi}$ άρα πρώτη φτάνει σφαίρα.

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Από τη σχέση $U = 3K \Rightarrow K = \frac{U}{3}$ και εφαρμόζοντας την ΑΔΕΤ έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow E = \frac{U}{3} + U \Rightarrow E = \frac{4}{3}U \Rightarrow U = \frac{3}{4}E \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$$

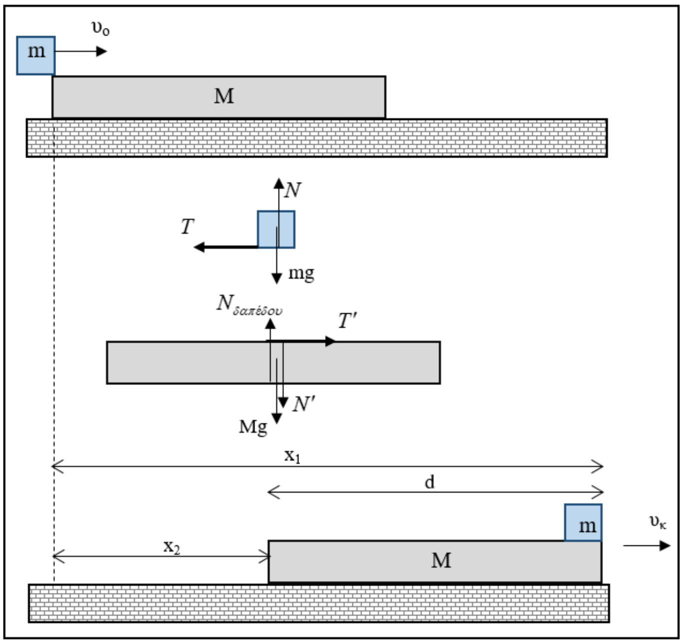
Επειδή η χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται σε θέση στον αρνητικό ημιάξονα $(x<0)$ έχοντας αρνητική ταχύτητα $(\upsilon<0)$ έχουμε $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}A$. Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται πρώτη φορά στη θέση $x = -A$ και δεύτερη φορά στη θέση $x = +A$.

Η κινητική ενέργεια είναι ίση με τη δυναμική στις θέσεις $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$.

Απόδειξη: $K = U \rightarrow$ ΑΔΕΤ : $E = K + U \Rightarrow E = 2U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 2\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$

Μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του σώματος για δεύτερη φορά η κινητική ενέργεια έχει γίνει ίση με τη δυναμική δύο φορές. Πρώτη φορά στη θέση $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}A$ με $\upsilon > 0$ και δεύτερη φορά στη θέση $x = +\frac{\sqrt{2}}{2}A$ με $\upsilon > 0$.

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (α).



Το σώμα m κινούμενο πάνω στη σανίδα επιβραδύνεται λόγω της τριβής $\vec{T}$ για την οποία ισχύει: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg$ και $T = \mu N = \mu mg$. Η σανίδα αρχίζει να κινείται επιταχυνόμενη πάνω στο λείο δάπεδο προς τα δεξιά υπό την επίδραση της τριβής $\vec{T}'$, αντίδραση της τριβής $\vec{T}$ άρα για τα μέτρα τους ισχύει $T = T' = \mu mg$. Τα σώματα κάποια στιγμή αποκτούν κοινή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\kappa$, όταν το σώμα σταματά να κινείται ως προς τη σανίδα. Το σύστημα των δύο σωμάτων είναι μονωμένο άρα $\Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \vec{0}$ οπότε ισχύει η Αρχή Διατήρησης Ορμής: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow p_{(m)} = p_{\kappa o\iota\nu\acute{\eta}} \Rightarrow$

$$m\upsilon_o = m_{o\lambda}\upsilon_\kappa \Rightarrow m\upsilon_o = (m+M)\upsilon_\kappa \Rightarrow$$

$$\frac{M}{2}\upsilon_o = \left(\frac{M}{2}+M\right)\upsilon_\kappa \Rightarrow \frac{M}{2}\upsilon_o = \frac{3}{2}M\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon_\kappa = \frac{\upsilon_o}{3}$$

Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ για την κίνηση του κάθε σώματος μέχρι να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα έχουμε:

Για σώμα m: $K_{m,\tau\varepsilon\lambda} - K_{m,\alpha\rho\chi} = W_T \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_\kappa^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -T\cdot x_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_\kappa^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -\mu mg\cdot x_1 \Rightarrow$

$$\frac{\upsilon_\kappa^2}{2} - \frac{\upsilon_o^2}{2} = -\mu g\cdot x_1 \Rightarrow \upsilon_\kappa^2 - \upsilon_o^2 = -2\mu g\cdot x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{\upsilon_o^2 - \upsilon_\kappa^2}{2\mu g} \quad (1)$$

Για σανίδα M: $K_{M,\tau\varepsilon\lambda} - K_{M,\alpha\rho\chi} = W_T \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon_\kappa^2 - 0 = +T'\cdot x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}2m\upsilon_\kappa^2 = \mu mg\cdot x_2 \Rightarrow$

$$\upsilon_\kappa^2 = \mu g\cdot x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{\upsilon_\kappa^2}{\mu g} \quad (2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$x_1 - x_2 = \frac{\upsilon_o^2 - \upsilon_\kappa^2}{2\mu g} - \frac{\upsilon_\kappa^2}{\mu g} = \frac{\upsilon_o^2 - 3\upsilon_\kappa^2}{2\mu g} = \frac{\upsilon_o^2 - 3\frac{\upsilon_o^2}{9}}{2\mu g} = \frac{\upsilon_o^2 - \frac{\upsilon_o^2}{3}}{2\mu g} = \frac{\frac{2\upsilon_o^2}{3}}{2\mu g} = \frac{\upsilon_o^2}{3\mu g} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{\upsilon_o^2}{3\mu g}$$

Από σχήμα $x_1 - x_2 = d$ άρα $d = \frac{\upsilon_o^2}{3\mu g} \Rightarrow \boxed{\upsilon_o = \sqrt{3\mu g d}}$

<u>Θέμα Γ</u>

Γ1. Η εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης δίνεται από τον γενικό τύπο $x = A\cdot\eta\mu(\omega\cdot t + \varphi_o)$. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = \frac{1}{f} = \frac{\pi}{5}s = 0{,}2\pi\, s$. Ισχύει $\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{5}{\pi}\frac{rad}{s} \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$.

Το σώμα όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του έχει μέτρο ταχύτητας $\upsilon_1 = \upsilon_{\max} = 4\frac{m}{s} \Rightarrow \omega A = 4\frac{m}{s} \Rightarrow 10A = 4 \Rightarrow A = 0{,}4m$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η επιτάχυνση του σώματος έχει μέγιστο μέτρο και την αρνητική κατεύθυνση άρα το σώμα βρίσκεται στην ακραία θέση $x = +A$. Για την αρχική φάση της ταλάντωσης έχουμε:

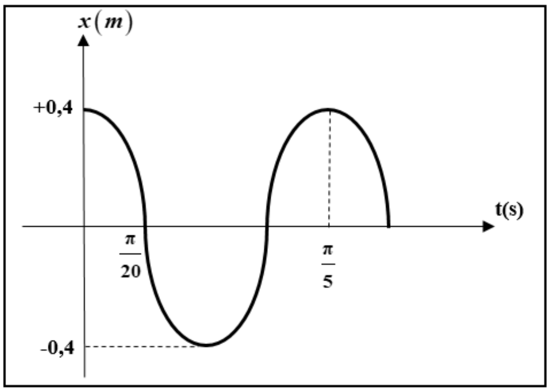
$$x=+A\xrightarrow{t=0}A\cdot\eta\mu(\omega\cdot 0+\varphi_o)=+A\Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_o=+1=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi_o=\frac{\pi}{2}$$

οπότε η εξίσωση απομάκρυνσης είναι:

$$\boxed{x=0,4\cdot\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)S.I.}$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ2. Η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο $\upsilon=2\frac{m}{s}$ στις θέσεις $x=\pm\frac{1}{\omega}\sqrt{\upsilon_{\max}^2-\upsilon^2}$

Απόδειξη τύπου: ΑΔΕΤ: $E=K+U\Rightarrow\frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}Dx^2\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\omega}\sqrt{\upsilon_{\max}^2-\upsilon^2}$

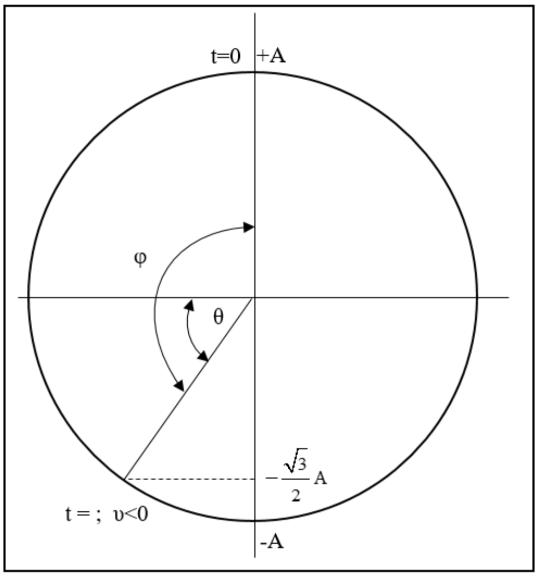
όπου $\upsilon_{\max}=\upsilon_1=4\frac{m}{s}$ και $\upsilon=2\frac{m}{s}=\frac{\upsilon_{\max}}{2}$

άρα $x=\pm\frac{1}{\omega}\sqrt{\upsilon_{\max}^2-\frac{\upsilon_{\max}^2}{4}}=\pm\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{3\upsilon_{\max}^2}{4}}\Rightarrow$

$$x=\pm\frac{1}{\omega}\frac{\sqrt{3}}{2}\upsilon_{\max}=\pm\frac{1}{\omega}\frac{\sqrt{3}}{2}\omega A\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$$

Για δεύτερη φορά η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο $\upsilon=2\frac{m}{s}$ στη θέση $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ με αρνητική ταχύτητα.

Με τη βοήθεια του κύκλου έχουμε:



$$\eta\mu\theta=\frac{\sqrt{3}/2\,A}{A}=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}rad$$

και $\varphi=\frac{\pi}{2}rad+\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\Rightarrow\varphi=\frac{5\pi}{6}rad$.

Άρα $\varphi=\omega t\Rightarrow\frac{5\pi}{6}=10t\Rightarrow\boxed{t=\frac{\pi}{12}s}$

Για τον ρυθμό μεταβολής κινητικής ενέργειας ισχύει: $\frac{dK}{dt}=\frac{dW_{\Sigma F}}{dt}=\Sigma F\cdot\upsilon=-Dx\cdot\upsilon=-m\omega^2x\cdot\upsilon$

Εκείνη τη στιγμή έχουμε $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}A=-0,2\sqrt{3}m$ και $\upsilon=-2\frac{m}{s}$

άρα: $\frac{dK}{dt}=-1\cdot 100\cdot\left(-0,2\sqrt{3}\right)\cdot(-2)\frac{J}{s}\Rightarrow\frac{dK}{dt}=-40\sqrt{3}\frac{J}{s}$

Γ3. Θεωρώντας θετική φορά για τις ταχύτητες προς τα αριστερά έχουμε πριν την κρούση: $\upsilon_1=4\frac{m}{s}$ και $\upsilon_2=-2\frac{m}{s}$. Επειδή η κρούση είναι κεντρική ελαστική και τα σώματα έχουν ίσες μάζες θα ανταλλάξουν ταχύτητες, δηλαδή: $\boxed{\upsilon_1'=\upsilon_2=-2\frac{m}{s}}$ και $\boxed{\upsilon_2'=\upsilon_1=4\frac{m}{s}}$.

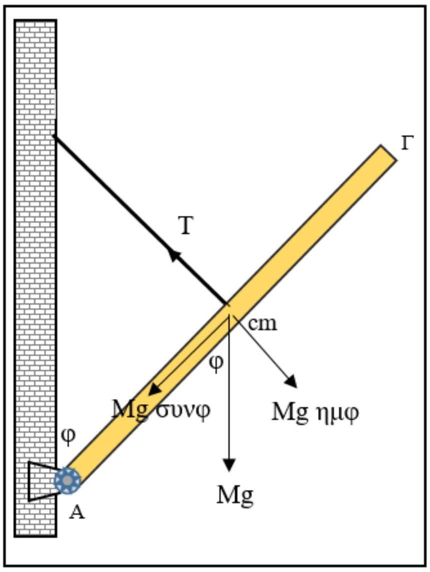
Γ4. Η μέγιστη συσπείρωση d του ελατηρίου θα υπολογιστεί με εφαρμογή του Θεωρήματος Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας για το σώμα Σ_1 από τη θέση ισορροπίας αμέσως μετά την κρούση και μέχρι την ακραία θέση μέγιστης συσπείρωσης:

$$d^2=\frac{m\upsilon_1'^2}{k}=0,04m^2\Rightarrow\boxed{d=0,2m}$$

Θέμα Δ

Δ1. Ισορροπία δοκού: $\Sigma\tau_{(\mathrm{A})}=0\Rightarrow\tau_{\mathrm{T}}-\tau_{Mg\eta\mu\varphi}=0\Rightarrow$

$$\mathrm{T}\frac{\ell}{2}-Mg\eta\mu\varphi\frac{\ell}{2}=0\Rightarrow\mathrm{T}=Mg\eta\mu\varphi\Rightarrow\boxed{\mathrm{T}=16N}$$



Δ2. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το άκρο της Α είναι:

$$I_{\mathrm{A}}=I_{cm}+M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2=\frac{1}{12}M\ell^2+M\frac{\ell^2}{4}\Rightarrow$$

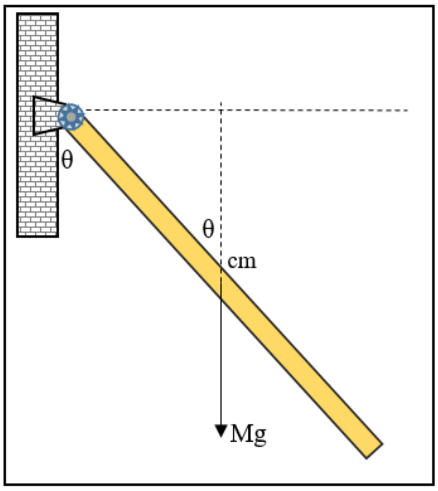
$$I_{\mathrm{A}}=\frac{1}{3}M\ell^2\Rightarrow\boxed{I_{\mathrm{A}}=\frac{32}{3}Kg\cdot m^2}$$

Δ3. Στη θέση που σχηματίζει γωνία $\theta=30^{\circ}$ με τον κατακόρυφο τοίχο η γωνιακή επιτάχυνση της δοκού υπολογίζεται από τον Θεμελιώδη νόμο στροφικής:

ΘΝΣ: $\Sigma\tau=I_A a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow\tau_{Mg\eta\mu\varphi}=I_A a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$

$$Mg\cdot\eta\mu\theta\frac{\ell}{2}=\frac{1}{3}M\ell^2 a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow a_{\gamma\omega\nu}=\frac{3}{2}\frac{g\cdot\eta\mu\theta}{\ell}\Rightarrow$$

$$\boxed{a_{\gamma\omega\nu}=\frac{15}{8}\frac{rad}{s^2}=1{,}875\frac{rad}{s^2}}$$



Δ4. Ο δίσκος κινούμενος πάνω στη δοκό εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. Στον δίσκο ασκούνται το βάρος του $m\vec{g}$, η στατική τριβή $\vec{T}_S$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τη δοκό.
Εφαρμόζοντας τους θεμελιώδεις νόμους έχουμε:
ΘΝΜ : $\Sigma F_x=ma_{cm}\Rightarrow mg\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi-T_S=ma_{cm}$ (1)
ΘΝΣ: $\Sigma\tau=I_{cm}a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow\tau_{T_S}=I_{cm}a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$

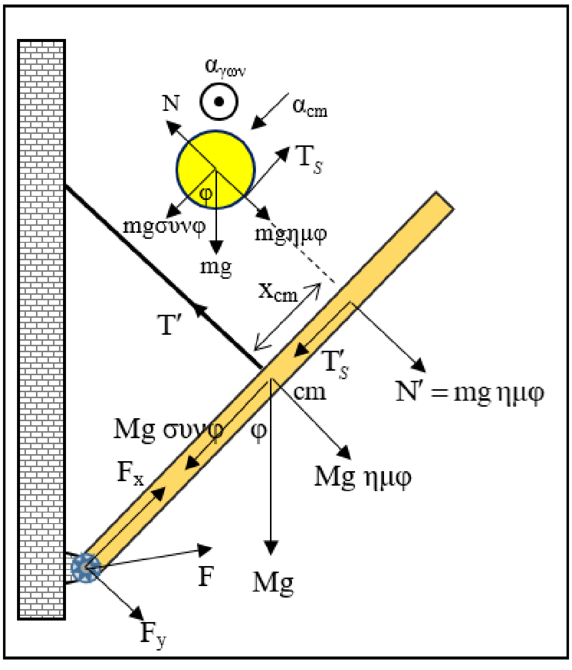
$$T_S R=\frac{1}{2}mR^2 a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow T_S=\frac{1}{2}ma_{cm}\ (2)$$

$(1)+(2)$ έχουμε:

$$mg\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi-T_S+T_S=ma_{cm}+\frac{1}{2}ma_{cm}\Rightarrow$$

$$mg\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{3}{2}ma_{cm}\Rightarrow$$

$$a_{cm}=\frac{2}{3}g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow\boxed{a_{cm}=4\frac{m}{s^2}}$$



Δ5. Στη δοκό ασκούνται το βάρος της $M\vec{g}$, η τάση του νήματος $\vec{T}'$, η κάθετη δύναμη N' από τον δίσκο, η αντίδραση της στατικής τριβής από τον δίσκο T_S' και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση.

Για τον δίσκο ισχύει: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg\eta\mu\varphi$

Επίσης ισχύει κατά μέτρο $N = N' = mg\,\eta\mu\varphi$ (3) (δράση – αντίδραση)

Για την ισορροπία της δοκού έχουμε:

$\Sigma F_y' = 0 \Rightarrow T' - N' - Mg\,\eta\mu\varphi - F_y = 0$ (4)

$\Sigma F_x' = 0 \Rightarrow F_x - Mg\,\sigma\upsilon\nu\varphi - T_S' = 0$ (5)

$$\Sigma\tau' = 0 \Rightarrow \tau_{T'} - \tau_{N'} - \tau_{Mg\eta\mu\varphi} = 0 \Rightarrow T'\frac{\ell}{2} - N'\left(\frac{\ell}{2} + x_{cm}\right) - Mg\,\eta\mu\varphi\frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow T' = 40N$$

Από $(4) \Rightarrow F_y = 8N$ και από $(5) \Rightarrow F_x = 16N$

Για το μέτρο της δύναμης της άρθρωσης ισχύει:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{16^2 + 8^2}N = \sqrt{(2\cdot 8)^2 + 8^2}N = \sqrt{5\cdot 8^2}N \Rightarrow \boxed{F = 8\sqrt{5}N = \sqrt{320}N}$$