ΘΕΜΑ Α Α4. 1. Σ 2. Σ 3. Λ 4. Λ 5. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = -\infty - (+\infty) = -\infty$

άρα $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

• $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x - \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 0 - 0 = 0$

$\to \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = +\infty$ άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Β2. $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x > 0$ άρα $f \uparrow$ στο $(0,+\infty)$

• f συνεχής κ' $\uparrow$ στο $(0,+\infty)$ τότε $f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Β3 $g(x) = g'(x) \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

$0 \in f(A)$ κ' επειδή $f \uparrow$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,+\infty)$

Β4 Θεωρώ $h(x) = xe^x - (x-1)\ln x$, $x > 0$

• $h(1) = e > 0$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(xe^x - (x-1)\ln x\right) = 0 + (-\infty) = -\infty$

άρα $\exists\, x_1$ κοντά στο 0 $(x_1 < 1)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) < 0$

Οπότε $h(1)\,h(x_1) < 0$ Θ. Bolzano ...

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 (α) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} \overset{*}{=} \lim\limits_{u\to 0} e^u = e^0 = 1$

* Θέτουμε $u = x\ln x$

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

(β) $f^2(x) = (x^2+1)^2$

- $x^2+1 \neq 0$ άρα $f^2(x)\neq 0$ οπότε $f(x)\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f(0)=1>0$ κ' $f(x)\neq 0$ τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο οπότε $f(x)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

άρα $f(x)=\sqrt{(x^2+1)^2} = |x^2+1| = x^2+1$

Γ2 (α) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\mu x\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\mu\right) = +\infty(1-\mu)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f(x)}+\mu x\right) = -\infty$ πρέπει $1-\mu<0 \Leftrightarrow -\mu<-1$
$\Leftrightarrow \mu>1$

(β) Θεωρώ $k(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \mu x^2 - 7$

Έστω $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ με $k(\rho_1)=k(\rho_2)=k(\rho_3)=0$

Θ.R Θ.R

$k'(x_1)=k'(x_2)$

Θ.R

$k''(\xi)=0$

- $k'(x) = -2\eta\mu x + 2\mu x$

$k''(x) = -2\sigma\upsilon\nu x + 2\mu$

Εφόσον, $k''(\xi)=0 \Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu\xi + 2\mu = 0 \Leftrightarrow 2\mu = 2\sigma\upsilon\nu\xi \Leftrightarrow \mu = \sigma\upsilon\nu\xi$

Άτοπο αφού $\mu>1$ κ' $\sigma\upsilon\nu\xi \leq 1$ άρα έχει το πολύ 2 ρίζες

Γ3 (α) Έστω $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$\Leftrightarrow \quad y - x_0^2 - 1 = 2x_0(x - x_0)$

• $A(0,-3) \in (\varepsilon) \Rightarrow -3 - x_0^2 - 1 = -2x_0^2$

$\Leftrightarrow -x_0^2 + 2x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$

άρα ΣΗΜΕΙΑ ΕΠΑΦΗΣ:

$M_1(2,5)$ κ' $M_2(-2,5)$

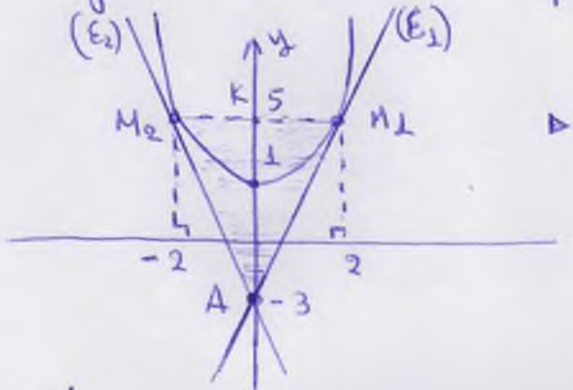
$\rightarrow (\varepsilon_1): y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 5 = 4(x-2)$

$\Leftrightarrow y = 4x - 8 + 5$ άρα $(\varepsilon_1): y = 4x - 3$

$\rightarrow (\varepsilon_2): y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \Rightarrow y - 5 = -4(x+2)$

$\Leftrightarrow y = -4x - 8 + 5$ άρα $(\varepsilon_2)\ y = -4x - 3$

(β)



$\triangleright (AM_1M_2) = \frac{(M_1M_2)\cdot(KA)}{2} = \frac{\cancel{4}^{2}\cdot 8}{\cancel{2}} = 1$

Γ4 $f'(x)(g(x) - g(0)) + (f(x) - 2)g'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \Big((f(x)-2)(g(x)-g(0))\Big)' = 0 \Leftrightarrow \Big((x^2-1)(g(x)-g(0))\Big)' = 0$

Θέτουμε $h(x) = (x^2-1)(g(x)-g(0))$

$h(-1) = h(0) = h(1) = 0$

Θ.R.   Θ.R.

$h'(\xi_1) = 0 = h'(\xi_2) \rightarrow$ 2 τουλάχιστον ρίζες

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 (α) $x g(x) + 1 = \sigma\upsilon\nu x + \alpha x \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x g(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \alpha x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} + \alpha$

• $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} + \alpha\right) = 0 + \alpha = \alpha$

• Επειδη g συνεχης στο $[-\infty, 0]$: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} + \alpha & x < 0 \\ \alpha & , \quad x = 0 \end{cases}$

Οποτε $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} + \alpha, & x < 0 \\ \alpha, & x = 0 \\ -x^3 + x + 2, & x > 0 \end{cases}$

(β) • f συνεχης στο $\mathbb{R}$ αρα f συνεχης στο $[0,1]$

• Για $x \in (0,1)$: $f(x) = -x^3 + x + 2$ παρ/μη ως πολ/κη

• Εφοσον, δεν ικανοποιει ολες τις υποθεσεις του ΘΕΤ

τοτε $f(0) = f(1)$

Δ2 (α) Για $\beta = 1$.

• $f(x) = -x^3 + x + 2$ συνεχης στο $[1,2]$

• $\left.\begin{array}{l} f(1) = -1 + 1 + 2 = 2 > 0 \\ f(2) = -8 + 2 + 2 = -4 < 0 \end{array}\right\} f(1) f(2) < 0$

απο Θ. Bolzano η εξισωση $f(x) = 0$ εχει μια τουλαχιστον ριζα στο $(1,2)$

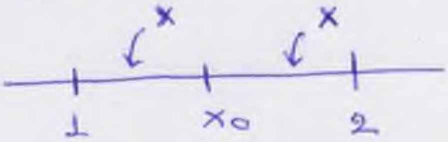
• $f'(x) = -3x^2 + 1 \overset{*}{<} 0$ αρα η $f \downarrow$ οποτε "1-1"

$*$ $x > 1 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow -3x^2 < -3 \Leftrightarrow -3x^2 + 1 < -2 < 0$

Τελικα, οταν $\beta = 1$ η εξισ. $f(x) = 0$ εχει ακριβως μια ριζα στο $(1,2)$

(β) Από το (α) έχουμε:

Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,2)$: $f(x_0)=0$



Επίσης η f στο $(1,2)$ είναι $\downarrow$

▸ $1<x<x_0 \Leftrightarrow x<x_0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_0) \Leftrightarrow f(x)>0$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

▸ $x_0<x<2 \Leftrightarrow x_0<x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_0)>f(x) \Leftrightarrow f(x)<0$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$ άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$

Δ3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{συνx-1}{x}+α\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{συνx}{x}-\dfrac{1}{x}+α\right) \overset{*}{=} 0-0+α$

$* \quad \left|\dfrac{συνx}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-\dfrac{1}{|x|}} \le \underset{\substack{\downarrow\, K.Π \\ 0}}{\dfrac{συνx}{x}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\dfrac{1}{|x|}}$

άρα $y=α$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

▸ $f(x)=α \overset{x<0}{\Leftrightarrow} \dfrac{συνx-1}{x}+α=α \Leftrightarrow \dfrac{συνx-1}{x}=0 \Leftrightarrow συνx=1$

$\Leftrightarrow συνx=συν0 \Leftrightarrow x=2κπ, \; κ\in\mathbb{Z}^-$ άρα άπειρες λύσεις

Δ4 Είναι: $|ημx| \le |x| \Leftrightarrow |x| - |ημx| \geq 0 \overset{+x_0}{\Leftrightarrow} |x| + x_0 -$

$\overset{+x_0}{\Leftrightarrow} |x| + x_0 - |ημx| \geq x_0 > 1 \Leftrightarrow |x| + x_0 - |ημx| > 1$

- Η f είναι $\downarrow$ στο $(1, +\infty) \subseteq \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ άρα και 1-1
- $f(-2018\pi) = \alpha^*$ άρα $f(|x| + x_0 - ημx) + \alpha = \alpha$

οπότε $f(|x| + x_0 - |ημx|) = 0 \Leftrightarrow$

$f(|x| + x_0 - |ημx|) = f(x_0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$|x| + x_0 - |ημx| = x_0 \Leftrightarrow |x| = |ημx|$

άρα $x = 0$ (Γνωρίζουμε $|ημx| \le |x|$ και το ίσον ισχύει μόνο όταν $x = 0$)

$* \quad f(-2018\pi) = \dfrac{συν(-2018\pi) - 1}{-2018\pi} + \alpha = \dfrac{συν0 - 1}{-2018\pi} + \alpha = 0 + \alpha = \alpha$