

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 18 /11/2017

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι αν $f(x) = x^v$ με $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, τότε $f'(x) = vx^{v-1}$
- A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μεγίστης και ελαχίστης τιμής
- A3.** Ποτέ λέμε ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
1. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
 2. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.
 3. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα
 4. Αν $f(x) = a^x$, $a > 0$, τότε ισχύει $(a^x)' = xa^{x-1}$
 5. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R Και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Μονάδες 7- 4 - 4 - 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln x$, $x > 0$

- B1.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της Cf , όπου $f(x) = g(x) - g'(x)$
- B2.** Να βρείτε μονοτονία και το σύνολο τιμών της f
- B3.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)$ και $g'(x)$ έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο .
- B4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1} = g(x)g'(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

Μονάδες 6 - 6 - 6 - 7

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΘΕΜΑ Γ

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει :

- $f^2(x) = x^4 + 2x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^x$

Γ1. Να δείξετε ότι : α) $f(0) = 1$ (2 μονάδες) και

β) $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ (4 μονάδες)

Γ2. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{f(x)} + \mu \cdot x) = -\infty, \mu \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

α) $\mu > 1$ (2 μονάδες) και

β) Η εξίσωση $2\sin x + \mu \cdot x^2 - 7 = 0$ έχει το πολύ 2 ρίζες στο \mathbb{R} . (4 μονάδες)

Γ3. α) Να βρείτε τις εφαπτόμενες της Cf που άγονται από το σημείο $A(0, -3)$

(4 μονάδες)

β) Αν $(\varepsilon_1) : y = 4x - 3$ και $(\varepsilon_2) : y = -4x - 3$ οι εφαπτόμενες της Cf στα σημεία επαφής $M_1(2,5)$ και $M_2(-2,5)$ αντίστοιχα ,τότε να σχεδιάσετε τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και την Cf ,και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AM_2M_1 . (3 μονάδες)

Γ4. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

ισχύει ότι : Η εξίσωση $f'(x)(g(x) - g(0)) = (2 - f(x))g'(x)$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο \mathbb{R} .

Μονάδες 6 – 6 – 7 – 6



En Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

- $xg(x) + 1 = \sigma\upsilon\nu x + \alpha x, x \in (-\infty, 0]$ και $\alpha \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq 0 \\ -x^3 + x + 2, & x > 0 \end{cases}$
- Η $f(x)$ δεν ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} + a, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ -x^3 + x + 2, & x > 0 \end{cases} \quad (3 \text{ μονάδες})$$

β) Η f διάστημα $[0,1]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle (2 μονάδες)

Δ2. α) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό β τέτοιο ώστε στο διάστημα $(\beta, \beta + 1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει ακριβώς μια ρίζα. (2 μονάδες)

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,2)$ για το οποίο δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}. \quad (5 \text{ μονάδες})$$

Δ3. Να δείξετε ότι η οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο $-\infty$ έχει με την Cf άπειρα κοινά σημεία όταν $x < 0$.

Δ4. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα όταν $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Να λύσετε την εξίσωση $f(|x| + x_0 - |\eta\mu x|) + \alpha = f(-2018\pi)$, όπου x_0 μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(1,2)$.

Μονάδες 5 – 7 – 5 – 8

