ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ: 30/9/20

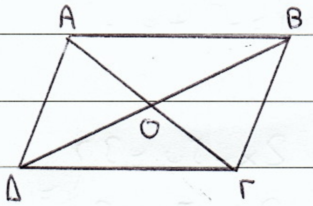
ΘΕΜΑ 1º:

Α i) Θεωρία → Σχολ. βιβλ. : σελ. 13

ii) 〃 〃 : σελ. 12

iii) 〃 〃 : σελ. 13

Β



i) Λάθος : $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$

ii) Σωστό

iii) Λάθος : $\vec{\Delta\Gamma} - \vec{\Delta A} = \vec{A\Gamma}$

iv) Σωστό

v) Λάθος : $\vec{OB} \uparrow\uparrow \vec{\Delta O}$

vi) Λάθος : $\vec{AO} - \vec{\Gamma O} = \vec{AO} + \vec{O\Gamma} = \vec{A\Gamma}$

vii) Λάθος : $\vec{A\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} + \vec{\Gamma B} = \vec{AB}$

Γ i) Έχουμε: $\vec{AE} - \vec{H\Gamma} = \vec{\Delta Z} + \vec{BH} - \vec{EZ} \Leftrightarrow$

$\vec{AE} + \vec{EZ} = \vec{\Delta Z} + \vec{BH} + \vec{H\Gamma} \Leftrightarrow$

$\vec{AZ} = \vec{\Delta Z} + \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$\vec{AZ} - \vec{\Delta Z} = \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$\vec{AZ} + \vec{Z\Delta} = \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$ άρα ΑΒΓΔ: #

ii) Έχουμε: $\left.\begin{array}{l}\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} \\ \vec{AN} = \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B}\end{array}\right\} \overset{(-)}{\Longrightarrow} \vec{AM} - \vec{AN} = \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} - \vec{A\Delta} - \vec{\Gamma B}$

$\Leftrightarrow \vec{NM} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta A}$

$\Leftrightarrow \vec{NM} = \vec{AA} \Leftrightarrow \vec{NM} = \vec{0}$

Εν δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ 2ο

Α

i) Σωστό

ii) Σωστό

iii) Λάθος

Β

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1-x}{6} - \dfrac{\psi - x}{2} = \dfrac{\psi+2}{3} \\ 2\cdot[x+\psi-2(x-\psi)] = -(3-\psi) \end{array}\right\} \overset{\cdot 6}{\Longleftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 1-x-3(\psi-x) = 2(\psi+2) \\ 2\cdot(x+\psi-2x+2\psi) = -3+\psi \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 1-x-3\psi+3x = 2\psi+4 \\ -2x+6\psi = -3+\psi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-5\psi = 3 \\ -2x+5\psi = -3 \end{array}\right\} \underset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 2x-5\psi = 3 \\ 2x-5\psi = 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-5\psi = 3 \Leftrightarrow 2x = 3-5\psi \Leftrightarrow x = \frac{3-5\psi}{3}$$

Άρα το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$(x,\psi) = \left(\frac{3-5\psi}{3}, \psi\right),\ \psi \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad \boxed{\left(\frac{3-5\kappa}{3}, \kappa\right),\ \kappa \in \mathbb{R}}$$

Γ

$$\left.\begin{array}{l} (x+3)^2 - (x+\psi)(x-\psi) = 16 - \psi(5-\psi) \\ x^2 - (x+\psi)(x+3) = -1 - \psi(x+1) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+6x+9-x^2+\psi^2 = 16-5\psi+\psi^2 \\ x^2-x^2-3x-\psi x-3\psi = -1-\psi x-\psi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 6x+5\psi = 7 \\ -3x-2\psi = -1 \end{array}\right\} \underset{\cdot 2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6x+5\psi = 7 \\ -6x-4\psi = -2 \end{array}\right\} (+)$$

$$\psi = 5$$

Έχουμε: $-3x-2\psi = -1 \Leftrightarrow -3x-2\cdot 5 = -1 \Leftrightarrow -3x = 9 \Leftrightarrow x = -3$

άρα $\boxed{(x,\psi) = (-3,5)}$

ΘΕΜΑ 3ο

(A) Έχουμε: $(\beta-3\alpha)\cdot x+(2\alpha-\beta)\cdot\psi+1=0$ (1)

i) Από (1) $\xrightarrow{K(-2,-1)}$ $(\beta-3\alpha)\cdot(-2)+(2\alpha-\beta)\cdot(-1)+1=0$

$\Leftrightarrow -2\beta+6\alpha-2\alpha+\beta+1=0 \Leftrightarrow 4\alpha-\beta=-1$

Από (1) $\xrightarrow{\Lambda(4,3)}$ $(\beta-3\alpha)\cdot 4+(2\alpha-\beta)\cdot 3+1=0$

$\Leftrightarrow 4\beta-12\alpha+6\alpha-3\beta+1=0 \Leftrightarrow -6\alpha+\beta=-1$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned}4\alpha-\beta&=-1\\-6\alpha+\beta&=-1\end{aligned}\right\}(+)$$

$-2\alpha=-2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1}$

Έχουμε: $4\alpha-\beta=-1 \Leftrightarrow 4\cdot1-\beta=-1 \Leftrightarrow \boxed{\beta=5}$

ii) Για $\alpha=1$ και $\beta=5$ η ευθεία (ε) γίνεται:

$(5-3\cdot1)x+(2\cdot1-5)\cdot\psi+1=0 \Leftrightarrow 2x-3\psi=-1$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned}2x-3\psi&=-1\\3x-4\psi&=-3\end{aligned}\right\}\begin{matrix}\cdot 3\\ \Leftrightarrow\\ \cdot(-2)\end{matrix}\quad \left.\begin{aligned}6x-9\psi&=-3\\-6x+8\psi&=6\end{aligned}\right\}$$

$-\psi=3 \Leftrightarrow \psi=-3$

Έχουμε: $2x-3\psi=-1 \Leftrightarrow 2x-3(-3)=-1 \Leftrightarrow 2x+9=-1 \Leftrightarrow x=-5$

Άρα οι ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται στο σημείο $\boxed{A(-5,-3}$

(B) Έχουμε: $(x+2\psi)^2+(x-\psi)^2+17=8(x+2\psi)+2(x-\psi) \Leftrightarrow$

$(x+2\psi)^2-8(x+2\psi)+16+(x-\psi)^2-2(x-\psi)+1=0 \Leftrightarrow$

$(x+2\psi+4)^2+(x-\psi+1)^2=0 \Leftrightarrow$

$x+2\psi+4=0$ και $x-\psi+1=0$

$$\left.\begin{aligned}x+2\psi&=-4\\x-\psi&=-1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{aligned}\psi-1+2\psi&=-4\\x&=\psi-1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{aligned}3\psi&=-3\\x&=\psi-1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \begin{aligned}\psi&=-1\\x&=-2\end{aligned}$$ άρα $\boxed{(x,\psi)=(-2,-1)}$

Γ) Έστω x και ψ οι ακέραιοι με $x>\psi$

Έχουμε ότι: $\left.\begin{matrix} x+\psi=26 \\ x=4\psi+1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 4\psi+1+\psi=26 \\ x=4\psi+1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 5\psi=25 \\ x=4\psi+1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} \psi=5 \\ x=21 \end{matrix}$

Άρα $\boxed{(x,\psi)=(21,5)}$

ΘΕΜΑ 4ο

A) i) $\left.\begin{matrix} x-3\psi=2 & (1) \\ x^2-5\psi^2=-4 & (2) \end{matrix}\right\}$

Από $(1) \Leftrightarrow x=2+3\psi$ (3)

Από $(2) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} (2+3\psi)^2-5\psi^2=-4 \Leftrightarrow 4+12\psi+9\psi^2-5\psi^2=-4$

$\Leftrightarrow 4\psi^2+12\psi+8=0 \Leftrightarrow \psi^2+3\psi+2=0 \Leftrightarrow \psi=-2$ ή $\psi=-1$

→ Αν $\psi=-2$, από $(3) \Leftrightarrow x=2+3\cdot(-2) \Leftrightarrow x=-4$ άρα $\boxed{(x,\psi)=(-4,-2)}$

→ Αν $\psi=-1$, από $(3) \Leftrightarrow x=2+3\cdot(-1) \Leftrightarrow x=-1$ άρα $\boxed{(x,\psi)=(-1,-1)}$

ii) $\left.\begin{matrix} 4x-4\psi-3x\psi=-2 & (1) \\ x\psi-2x+2\psi=4 & (2) \end{matrix}\right\}$

Από $(2) \Leftrightarrow x\psi-2x+2\psi-4=0 \Leftrightarrow x(\psi-2)+2(\psi-2)=0$

$\Leftrightarrow (\psi-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow \psi=2$ ή $x=-2$

→ Αν $\psi=2$ από $(1) \Leftrightarrow 4x-8-6x=-2 \Leftrightarrow -2x=6 \Leftrightarrow x=-3$

άρα $\boxed{(x,\psi)=(-3,2)}$

→ Αν $x=-2$ από $(1) \Leftrightarrow -8-4\psi+6\psi=-2 \Leftrightarrow 2\psi=6 \Leftrightarrow \psi=3$

άρα $\boxed{(x,\psi)=(-2,3)}$

Β Έχουμε: $\left.\begin{array}{l}\sqrt{2x+\psi}-\sqrt{x+\psi}=1\\ x+\psi+\sqrt{2x+\psi}=3\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\sqrt{2x+\psi}-\sqrt{x+\psi}=1\\ \sqrt{2x+\psi}+\sqrt{x+\psi}^2=3\end{array}\right\}$

Θέτουμε: $\sqrt{2x+\psi}=\alpha\geq 0$ και $\sqrt{x+\psi}=\beta\geq 0$ οπότε έχουμε:

$\left.\begin{array}{l}\alpha-\beta=1\\ \alpha+\beta^2=3\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=1+\beta\\ \alpha+\beta^2=3\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1)\\ (2)\end{array}$

Από $(2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1+\beta+\beta^2=3 \Leftrightarrow \beta^2+\beta-2=0 \Leftrightarrow \beta=-2$ ή $\beta=1$

Απορ.

Για $\beta=1$ από $(1)\Leftrightarrow \alpha=2$

άρα έχουμε: $\sqrt{2x+\psi}=2$ και $\sqrt{x+\psi}=1$

$\Leftrightarrow 2x+\psi=4$ και $x+\psi=1$

$\left.\begin{array}{l}2x+\psi=4\\ x+\psi=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}2x+1-x=4\\ \psi=1-x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x=3\\ \psi=1-x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}x=3\\ \psi=-2\end{array}$

άρα $\boxed{(x,\psi)=(3,-2)}$

Γ i) $\left.\begin{array}{l}x^2+\psi^2=17\\ x\psi=-4\end{array}\right\} \overset{x\neq 0}{\underset{\psi\neq 0}{\Longleftrightarrow}} \left.\begin{array}{l}x^2+\psi^2=17\\ \psi=-\frac{4}{x}\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1)\\ (2)\end{array}$

Από $(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow} x^2+\frac{16}{x^2}=17 \Leftrightarrow x^4+16=17x^2 \Leftrightarrow x^4-17x^2+16=0$

$\Leftrightarrow x^2=1$ ή $x^2=16$

$\Leftrightarrow x=\pm 1$ ή $x=\pm 4$

Αν $x=1$ από $(2)\Leftrightarrow \psi=-4$ άρα $(x,\psi)=(1,-4)$

Αν $x=-1$ από $(2)\Leftrightarrow \psi=4$ άρα $(x,\psi)=(-1,4)$

Αν $x=4$ από $(2)\Leftrightarrow \psi=-1$ άρα $(x,\psi)=(4,-1)$

Αν $x=-4$ από $(2)\Leftrightarrow \psi=1$ άρα $(x,\psi)=(-4,1)$

ii) Ο κύκλος και η ... βολή έχουν 4 κοινά σημεία

Εν δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

iii)