Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: 3/1/2018

ΘΕΜΑ Α

Α1 Έχουμε: $A(2,\lambda)$, $B(6,\lambda+2)$, $\Gamma(2\lambda-1,-5)$

i) Αφού Μ: μέσο ΑΒ τότε: $M\left(\frac{2+6}{2}, \frac{\lambda+\lambda+2}{2}\right) \Rightarrow M(4,\lambda+1)$

Είναι: $\vec{AB}=(6-2,\lambda+2-\lambda) \Leftrightarrow \vec{AB}=(4,2)$

$\vec{\Gamma M}=(4-2\lambda+1,\lambda+1+5) \Leftrightarrow \vec{\Gamma M}=(5-2\lambda,\lambda+6)$

Έχουμε: $\vec{AB}\cdot\vec{\Gamma M}=20 \Leftrightarrow 4\cdot(5-2\lambda)+2\cdot(\lambda+6)=20$

$\Leftrightarrow \cancel{20}-8\lambda+2\lambda+12=\cancel{20}$

$\Leftrightarrow -6\lambda=-12 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=2}$

ii) Έστω $K(0,k)$.

Είναι: $\vec{AK}=(0-2,k-\lambda) \Leftrightarrow \vec{AK}=(-2,k-2)$

Έχουμε: $\vec{AK}\perp\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AK}\cdot\vec{AB}=0$

$\Leftrightarrow -2\cdot 4+(k-2)\cdot 2=0$

$\Leftrightarrow -8+2k-4=0$

$\Leftrightarrow 2k=12 \Leftrightarrow k=6$, άρα $\boxed{K(0,6)}$

iii) Για $\lambda=2$ έχουμε: $A(2,2)$, $B(6,4)$, $\Gamma(3,-5)$

Είναι: $\vec{BA}=(-4,-2)$ άρα $|\vec{BA}|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\vec{B\Gamma}=(3-6,-5-4)=(-3,-9)$ άρα $|\vec{B\Gamma}|=\sqrt{9+81}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

Επίσης: $\vec{BA}\cdot\vec{B\Gamma}=(-4)(-3)+(-2)(-9)=12+18=30$

Είναι: $\text{συν}(\widehat{\vec{BA},\vec{B\Gamma}})=\frac{\vec{BA}\cdot\vec{B\Gamma}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{B\Gamma}|}=\frac{30}{2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

άρα $(\widehat{\vec{BA},\vec{B\Gamma}})=\frac{\pi}{4}$, οπότε $\boxed{\hat{B}=\frac{\pi}{4}}$

A2 i) Έχουμε: $(\lambda^2+\lambda-2)x+(\lambda^2-3\lambda+2)\cdot\psi+\lambda^2-1=0$ (1)

• έστω: $\lambda^2+\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=-2$ ή $\lambda=1$

• έστω $\lambda^2-3\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=2$

Για να παριστάνει η (1) ευθεία πρέπει: $\boxed{\lambda\neq 1}$

ii) Πρέπει: $\lambda^2-3\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=2 \overset{\lambda\neq1}{\Longleftrightarrow} \boxed{\lambda=2}$

iii) Πρέπει: $(\lambda^2+\lambda-2)\cdot 0+(\lambda^2-3\lambda+2)\cdot 0+\lambda^2-1=0$

$\Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm1 \overset{\lambda\neq1}{\Longleftrightarrow} \boxed{\lambda=-1}$

iv) Έστω $\vec{\delta}_1 \parallel (1) \Rightarrow \vec{\delta}_1=(\lambda^2-3\lambda+2,\ -\lambda^2-\lambda+2)$

$\vec{\delta}_2 \parallel (2) \Rightarrow \vec{\delta}_2=(2-\lambda,\ -\lambda)$

Είναι: $(1)\parallel(2) \Leftrightarrow \vec{\delta}_1\parallel\vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \det(\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda^2-3\lambda+2 & -\lambda^2-\lambda+2 \\ 2-\lambda & -\lambda \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2-3\lambda+2)-(2-\lambda)(-\lambda^2-\lambda+2)=0$

$\Leftrightarrow -\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda+2\lambda^2+2\lambda-4-\lambda^3-\lambda^2+2\lambda=0$

$\Leftrightarrow -2\lambda^3+4\lambda^2+2\lambda-4=0$

$\Leftrightarrow -2\lambda^2(\lambda-2)+2(\lambda-2)=0$

$\Leftrightarrow (\lambda-2)(-2\lambda^2+2)=0$

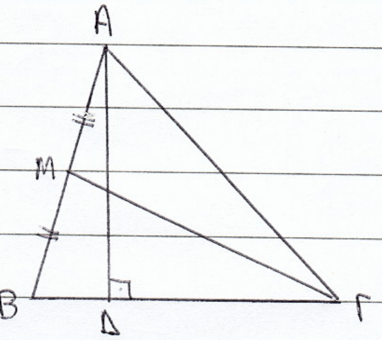
$\Leftrightarrow -2(\lambda-2)(\lambda^2-1)=0$

$\Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)=0$

$\Leftrightarrow \lambda=2$ ή $\lambda=1$ ή $\lambda=-1$

$\overset{\lambda\neq1}{\Longleftrightarrow} \boxed{\lambda=2}$ ή $\boxed{\lambda=-1}$

Α3



$AB: \psi = 3x - 1$

$\Gamma M: \psi = 5$

$A\Delta: \psi = -2x + 14$

• Λύνουμε το (Σ) των ΑΒ και ΑΔ

$$\begin{cases} \psi = 3x - 1 \\ \psi = -2x + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = 3x - 1 \\ 3x - 1 = -2x + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = 3x - 1 \\ 5x = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = 8 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(3, 8)}$$

• Λύνουμε το (Σ) των ΑΒ και ΓΜ

$$\begin{cases} \psi = 3x - 1 \\ \psi = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 3x - 1 \\ \psi = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ \psi = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \psi = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2, 5)$$

• Αφού Μ: μέσο ΑΒ θα έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{3 + x_B}{2} \Leftrightarrow 4 = 3 + x_B \Leftrightarrow x_B = 1 \\ \psi_M = \frac{\psi_A + \psi_B}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{8 + \psi_B}{2} \Leftrightarrow 10 = 8 + \psi_B \Leftrightarrow \psi_B = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{B(1, 2)}$$

• Αφού $A\Delta \perp B\Gamma \Rightarrow \lambda_{A\Delta} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow -2 \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = \frac{1}{2}$

Η ευθεία ΒΓ έχει εξίσωση $\psi - \psi_B = \lambda_{B\Gamma}(x - x_B)$

$$\psi - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\psi = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} : B\Gamma$$

Λύνουμε το σύστημα των ΒΓ και ΓΜ:

$$\begin{cases} \psi = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ \psi = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ \psi = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = x + 3 \\ \psi = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ \psi = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Gamma(7, 5)}$$

ΘΕΜΑ Β

Β1 Θεωρία: Σχολικό βιβλίο → σελ. 60

Β2 〃 〃 〃 → σελ. 31

Β3 〃 〃 〃 → σελ. 35

Β4

1) Λάθος	6) Λάθος
2) Σωστό	7) Σωστό
3) Λάθος	8) Λάθος
4) Σωστό	9) Σωστό
5) Σωστό	10) Σωστό

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 i)

- $ημ\frac{22π}{6} = ημ\left(4π - \frac{2π}{6}\right) = ημ\left(-\frac{π}{3}\right) = -ημ\frac{π}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $συν\frac{31π}{3} = συν\left(10π + \frac{π}{3}\right) = συν\frac{π}{3} = \frac{1}{2}$
- $εφ\frac{19π}{4} = εφ\left(5π - \frac{π}{4}\right) = εφ\left(π - \frac{π}{4}\right) = -εφ\frac{π}{4} = -1$
- $σφ1770^\circ = σφ(4 \cdot 360^\circ + 330^\circ) = σφ330^\circ = σφ(360^\circ - 30^\circ) = σφ(-30^\circ) = -σφ30^\circ = -\sqrt{3}$

Άρα $A = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (-\sqrt{3}) \Leftrightarrow \boxed{A = -\frac{3}{4}}$

ii)

- $ημ\left(\frac{43π}{2} - ω\right) = ημ\left(20π + \frac{3π}{2} - ω\right) = ημ\left(\frac{3π}{2} - ω\right) = -συνω$
- $συν\left(\frac{17π}{2} + ω\right) = συν\left(8π + \frac{π}{2} + ω\right) = συν\left(\frac{π}{2} + ω\right) = -ημω$
- $εφ(2018π - ω) = εφ(-ω) = -εφω$
- $συν\left(-\frac{25π}{2} + ω\right) = συν\left(-12π - \frac{π}{2} + ω\right) = συν\left(-\frac{π}{2} + ω\right) = ημω$
- $σφ\left(\frac{7π}{2} - ω\right) = σφ\left(2π + \frac{3π}{2} - ω\right) = σφ\left(\frac{3π}{2} - ω\right) = εφω$
- $συν(-2017π + ω) = συν(-2016π - π + ω) = συν(-π + ω) = -συνω$

Άρα: $B = \frac{(-συνω) \cdot (-ημω) \cdot (-εφω)}{ημω \cdot εφω \cdot (-συνω)} \Leftrightarrow \boxed{B = 1}$

Γ2 Είναι: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{49\pi}{4}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(12\pi+\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$\cdot\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{83\pi}{4}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(21\pi-\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

Άρα έχουμε: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{3}$

Άρα: $\left[\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2\Leftrightarrow$

$\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{9}\Leftrightarrow$

$1-2\Gamma=\frac{1}{9}\Leftrightarrow 2\Gamma=1-\frac{1}{9}\Leftrightarrow 2\Gamma=\frac{8}{9}\Leftrightarrow \boxed{\Gamma=\frac{4}{9}}$

Γ3 Έστω: $\frac{1+2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{1+3\eta\mu x}{1+\eta\mu x}=3\varepsilon\varphi^2 x\Leftrightarrow$

$\frac{1+2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{1+3\eta\mu x}{1+\eta\mu x}=\frac{3\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\Leftrightarrow$

$(1+\eta\mu x)(1+2\eta\mu x)-\sigma\upsilon\nu^2 x(1+3\eta\mu x)=3\eta\mu^2 x(1+\eta\mu x)\Leftrightarrow$

$1+2\eta\mu x+\eta\mu x+2\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x-3\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x=3\eta\mu^2 x+3\eta\mu^3 x\Leftrightarrow$

$\eta\mu^2 x+2\eta\mu^2 x+3\eta\mu x-3\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x=3\eta\mu^2 x+3\eta\mu^3 x\Leftrightarrow$

$3\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)=3\eta\mu^3 x\Leftrightarrow$

$3\eta\mu x\cdot\eta\mu^2 x=3\eta\mu^3 x\Leftrightarrow$

$3\eta\mu^3 x=3\cdot\eta\mu^3 x$, ισχύει

Γ4 πρέπει: $1-\eta\mu x \neq 0 \Rightarrow \eta\mu x \neq 1 \Rightarrow x \neq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
πρέπει: $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Έχουμε: $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} - \varepsilon\varphi x = 2 \Leftrightarrow$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x(1-\eta\mu x) = 2(1-\eta\mu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x + \eta\mu^2 x = 2\sigma\upsilon\nu x(1-\eta\mu x) \Leftrightarrow$$

$$1-\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x(1-\eta\mu x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-\eta\mu x)\cdot(1-2\sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow$$

$\eta\mu x = 1$ ή $1-2\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$

Απορ. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Έχουμε: $f(x) = a - 2\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$

i) Είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{2}}$

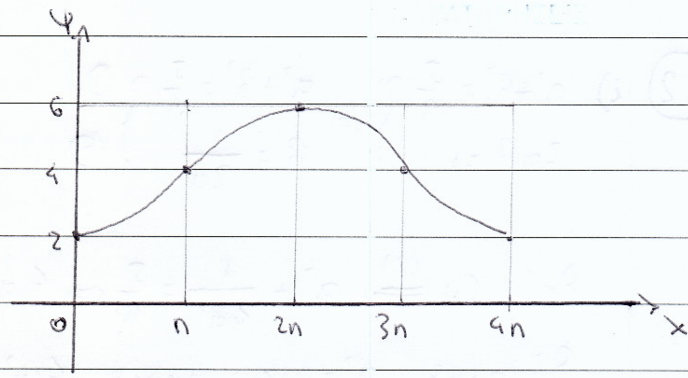
Άρα: $f(x) = a - 2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$

Είναι $\min f = -2+a$, άρα $-2+a = 2 \Leftrightarrow \boxed{a=4}$

Άρα $f(x) = 4 - 2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$.

ii)

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$	1	0	-1	0	1
$-2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$	-2	0	2	0	-2
$4-2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$	2	4	6	4	2



iii) Έχουμε: $f(2x) = g(x) \Leftrightarrow$

$$4 - 2\sigma\upsilon\nu\frac{2x}{2} = 7 + \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu^2 x \Leftrightarrow$$

$$4 - 2\sigma\upsilon\nu x = 7 + \sigma\upsilon\nu x - 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) \Leftrightarrow$$

$$0 = -4 + 2\sigma\upsilon\nu x + 7 + \sigma\upsilon\nu x - 2 + 2\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$$

Θέτουμε: $\sigma\upsilon\nu x = \omega, \quad -1 \le \omega \le 1$

άρα: $2\omega^2 + 3\omega + 1 = 0, \ \Delta = 1$

$$\omega_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{4} \quad \omega_1 = -\frac{1}{2}, \quad \omega_2 = -1$$

• Αν $\omega = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}}$

$\kappa \in \mathbb{Z}$

• Αν $\omega = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow \boxed{x = 2\kappa\pi + \pi}$

12 i) $\left.\begin{aligned} a^2+\beta^2 &= \frac{5}{4} \\ 2a\beta &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} a^2+\beta^2 &= \frac{5}{4} \\ \beta &= \frac{1}{2a} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Από $(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} a^2 + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4a^4+1 = 5a^2 \Leftrightarrow 4a^4 - 5a^2 + 1 = 0$

Θέτουμε $a^2 = \omega \geq 0$, οπότε $4\omega^2 - 5\omega + 1 = 0$, $\Delta = 9$

$$\omega_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 1 \\ \omega_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

• Αν $\omega = 1 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$

• Αν $\omega = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{2}$

→ Αν $a = 1$ από $(2) \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$, άρα $(a,\beta) = (1, \frac{1}{2})$

→ Αν $a = -1$ από $(2) \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$, άρα $(a,\beta) = (-1, -\frac{1}{2})$

→ Αν $a = \frac{1}{2}$ από $(2) \Rightarrow \beta = 1$, άρα $(a,\beta) = (\frac{1}{2}, 1)$

→ Αν $a = -\frac{1}{2}$ από $(2) \Rightarrow \beta = -1$ άρα $(a,\beta) = (-\frac{1}{2}, -1)$

ii) $\left.\begin{aligned} \eta\mu^2 x - \eta\mu^2\varphi &= \frac{1}{4} \\ 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \eta\mu^2 x - 1 + \sigma\upsilon\nu^2\varphi &= \frac{1}{4} \\ 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2\varphi &= \frac{5}{4} \\ 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi &= 1 \end{aligned}\right\} (E)$

Θέτουμε $\eta\mu x = a$, $0 \leq a \leq 1$
και $\sigma\upsilon\nu\varphi = \beta$, $-1 \leq \beta \leq 1$ διότι $x, \varphi \in [0, \pi]$

άρα το (Ε) γίνεται: $\left.\begin{aligned} a^2 + \beta^2 &= \frac{5}{4} \\ 2a\beta &= 1 \end{aligned}\right\}$

οπότε από (i) θα έχουμε

$(a,\beta) = (1, \frac{1}{2})$ ή $(a,\beta) = (\frac{1}{2}, 1)$

$\left.\begin{aligned} \eta\mu x &= 1 \\ \sigma\upsilon\nu\varphi &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$ $\qquad$ $\left.\begin{aligned} \eta\mu x &= \frac{1}{2} \\ \sigma\upsilon\nu\varphi &= 1 \end{aligned}\right\}$

$\boxed{(x,\varphi) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)}$ $\qquad$ $\boxed{(x,\varphi) = \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)}$, $\boxed{(x,\varphi) = \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)}$