1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 3 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2018

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών και να γίνει απόδειξη. **(7 μονάδες)**

Β)

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να γραφεί η γεωμετρική του ερμηνεία. **(3+2 μονάδες)**
2. Τι καλείται πλάγια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f στο $+\infty$; **(3 μονάδες)**

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό **(Σ)** ή Λάθος **(Λ)**.

1. Αν $f'(x_0)=0$ όπου $x_0\in(\alpha,\beta)$ και η f συνεχής στο [α,β] τότε $f(\alpha)=f(\beta)$.

2. Αν η f συνεχής στο [α,β] του πεδίου ορισμού της τότε είναι συνεχής στο α.

3. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=7$ τότε η y=7 οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της f(x).

4. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες .

5. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(x_0)=0$ με $x_0\in(a,\beta)$ τότε $f(a)\cdot f(\beta)<0$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$
- $g:[1,e]\to\mathbb{R}$ με $g(1)=\dfrac{1}{2}$ και $\dfrac{4-e}{2e^2-2e}<g'(x)<\dfrac{11}{2e-2}$ για κάθε $x\in[1,e]$.

1. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ **(4 μονάδες)** και να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f . **(5 μονάδες)**

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e f(x)\,dx$. **(4 μονάδες)**

3. Να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι γνησίως αύξουσα **(1 μονάδα)** και να αποδείξετε ότι $\dfrac{2}{e}<g(e)<6$. **(5 μονάδες)**

4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g παρουσιάζουν ακριβώς ένα σημείο τομής για $x_0\in(1,e)$. **(6 μονάδες)**

1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΘΕΜΑ 3º

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες είναι γνωστά :

- η f 2 φορές παραγωγίσιμη και η ευθεία $y=x+6$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$,
- $g(x)=\begin{cases}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6f(x)+\sqrt{x^2+1}-x}{xf(x)-x^2}\right)\cdot x+x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ \displaystyle\int_5^7\frac{3x-7}{(x-1)(x-3)}dx-\ln\frac{9}{2} & ,x=0\end{cases}$

1. Να αποδείξετε ότι $g(x)=\begin{cases}x+x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$. **(8 μονάδες)**
2. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία y=x είναι η εξίσωση εφαπτόμενης της g στο $x_0=0$. **(6 μονάδες)**
3. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-2\cdot f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)$. **(6 μονάδες)**
4. Αν κινητό Μ(x(t),y(t)) με x(t)≥0 κινείται κατά μήκος της εφαπτομένης της g στο $x_0=0$ όπου η τετμημένη του σημείου αυξάνει με ρυθμό 3μονάδες/sec τότε να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού που περικλείεται μεταξύ της εφαπτομένης, του x΄x και της κατακόρυφης από το σημείο Μ την στιγμή που το σημείο Μ έχει τετμημένη ίση με 8. **(5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 4º

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύουν:

- $f^2(x)+2f(x)\cdot x=\ln\left(x\cdot e^{-x}\right)\cdot\ln\left(x\cdot e^{x}\right)$ για κάθε $x>0$ με $f(e)=1-e$, $f(e^{-1})=-1-e^{-1}$,
- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όπου $g(1)=-3,\ g(3)=28$.

1. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\ln x-x,\ x>0$. **(8 μονάδες)**
2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f(x). **(4 μονάδες)**
3. Να δείξετε ότι η C_g παρουσιάζει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,3), **(3 μονάδες)** και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,3):g(x_1)\cdot g(x_2)+x_1^3\cdot x_2=0$. **(5 μονάδες)**
4. Να αποδειχθεί ότι για $x>0$ ισχύει $f\left(g^2(x)+x^2+1\right)\leq f\left(g^2(x)+2x\right)-x^2+3x-3+\dfrac{1}{x}$. **(5 μονάδες)**

...ΕΥΧΟΜΕΘΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑ...