Διαγώνισμα Γ τάξης Λυκείου

Μαθηματικά κατεύθυνσης

3 / 1 / 2018

ΘΕΜΑ 1:

Γ. 1. ΛΑΘΟΣ

2. ΛΑΘΟΣ

3. ΣΩΣΤΟ

4. ΣΩΣΤΟ

5. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2:

1. $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$, $x>0$ τότε $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x - 1}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$

• Για $x \in (1,+\infty)$: $f'(x) < 0 \xrightarrow[{[1,+\infty)}]{f \text{ συνεχής}} f \downarrow [1,+\infty)$

• Για $x \in (0,1)$: $f'(x) > 0 \xrightarrow[{(0,1]}]{f \text{ συνεχής}} f \uparrow (0,1]$

• Πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ (ή οριζόντια): $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + 1}{x} =$

$\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ οπότε η $\boxed{y=0}$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

• Κατακόρυφη ασύμπτωτη: $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \left[\underbrace{(\ln x + 1)}_{-\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} \right] = -\infty$

οπότε η $\boxed{x=0}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

2. $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{\ln x + 1}{x} dx = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^e \left[(\ln x)' \cdot \ln x + \frac{1}{x}\right] dx$

$= \left[\frac{\ln^2 x}{2} + \ln x \right]_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} + \ln e - \frac{\ln^2 1}{2} - \ln 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

3. Ισχύει ότι $\boxed{\frac{4-e}{2e(e-1)} < g'(x) < \frac{11}{2(e-1)}}$ ① οπότε η $g'(x)$ βρίσκεται μεταξύ 2 θετικών αριθμών οπότε $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow$

Από Θ.Μ.Τ. στο $[1,e]$ υπάρχει $\xi \in (1,e)$: $g'(\xi) = \frac{g(e) - g(1)}{e-1} = \frac{g(e) - \frac{1}{2}}{e-1}$

① $\xrightarrow{x=\xi} \frac{4-e}{2e\cancel{(e-1)}} < \frac{g(e) - 1/2}{\cancel{e-1}} < \frac{11}{2\cancel{(e-1)}} \Leftrightarrow \frac{4-e}{2e} < g(e) - \frac{1}{2} < \frac{11}{2} \xleftrightarrow{+1/2}$

$\Leftrightarrow \frac{4-e}{2e} + \frac{1}{2} < g(e) < \frac{11}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{2}{e} < g(e) < 6}$

4. Έστω $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in[1,e]$

για $x_1,x_2\in(1,e)$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \xleftrightarrow{f\downarrow} f(x_1)>f(x_2) \\ \xleftrightarrow{g\uparrow} g(x_1)<g(x_2) \xleftrightarrow{\cdot(-1)} -g(x_1)>-g(x_2) \end{cases} \xrightarrow{(+)}$

$f(x_1)-g(x_1)>f(x_2)-g(x_2) \Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)$

οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα οπότε παρουσιάζει το πολύ μία ρίζα.

• Η h συνεχής στο $[1,e]$ ως πράξεις συνεχών

$h(1)=f(1)-g(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$

$h(e)=f(e)-g(e)=\frac{2}{e}-g(e)<0$ (από 3.) $\Big\} \Rightarrow h(1)\cdot h(e)<0$

από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)$: $h(x_0)=0$

Από μονοτονία ($h\downarrow$) το $x_0\in(1,e)$ είναι μοναδικό ώστε $h(x_0)=0$

$\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

ΘΕΜΑ 3°

1. Από υπόθεση η $y=x+6$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

οπότε $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1}$ και $\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=6}$

$$\bullet\ A=\lim_{x\to+\infty}\frac{6f(x)+\sqrt{x^2+1}-x}{xf(x)-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\frac{f(x)}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}}{f(x)-x}$$

όμως $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(\sqrt{x^2+1}+x)}$

$=0$

Άρα το όριο $A=\frac{6\cdot1+0}{6}=1$.

$$\bullet\ B=\int_5^7\frac{3x-7}{(x-1)(x-3)}\,dx$$

Για $x\in[5,7]$ θεωρούμε $\frac{3x-7}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)}=\frac{(A+B)x-3A-B}{(x-1)(x-3)}$

Πρέπει: $\begin{cases} A+B=3 \quad ① \\ -3A-B=-7 \end{cases} \overset{⊕}{\Longrightarrow} -2A=-4 \Leftrightarrow \boxed{A=2} \overset{①}{\Longrightarrow} \boxed{B=1}$

Άρα το ολοκλήρωμα $B=\int_5^7 \frac{3x-7}{(x-1)(x-3)}dx = \int_5^7 \left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-3}\right)dx$

$= \left[2\ln|x-1| + \ln|x-3|\right]_5^7 = 2\ln 6 + \ln 4 - 2\ln 4 - \ln 2$

$= \ln 36 - \ln 4 - \ln 2 = \ln\frac{36}{4\cdot 2} = \ln\frac{9}{2}$

Έτσι προκύπτει: $\boxed{g(x) = \begin{cases} x + x^2 \eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

▶ $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x|\cdot 1 \Leftrightarrow -|x| \le x\eta\mu\frac{1}{x} \le |x|$

$\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = 0 = \lim\limits_{x\to 0}(|x|) = 0$

$\Rightarrow$ Από κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1+0=1$ συνεπώς $\boxed{g'(0)=1}$

Εφ: $y-g(0)=g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-0=1(x-0) \Leftrightarrow \boxed{y=x}$

3. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x+h)\cdot(x+h)' - 0 + f'(x-h)\cdot(x-h)'}{2h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)-f'(x-h)+f'(x)}{h}$

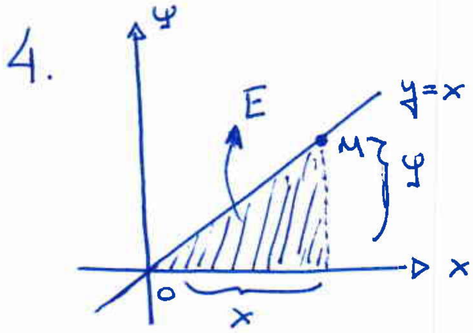
$= \frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} - \frac{f'(x-h)-f'(x)}{h}\right]$ ⊛

όμως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{h} \underset{\lim\limits_{h\to 0}(-h)=0}{\overset{u=-h}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\frac{f'(x+u)-f'(x)}{-u} = -f''(x)$

οπότε το ζητούμενο όριο από ⊛ $= \frac{1}{2}\left(f''(x) - (-f''(x))\right) = \frac{1}{2}\cdot 2f''(x)$

$= f''(x)$.

4.



Τα x, y μεταβαλλόμενα μεγέθη ως προς τον χρόνο και αφού το $M(x,\psi)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=x$ θα ισχύει $x(t)=y(t)$. Από υπόθεση $x'(t) = 3$ μον/sec

Συνεπώς $E = \dfrac{x\cdot\psi}{2}$ άρα $E(t) = \dfrac{x(t)\cdot y(t)}{2} = \dfrac{x^2(t)}{2}$

οπότε $E'(t) = \dfrac{\cancel{2}x(t)\cdot x'(t)}{\cancel{2}} \xrightarrow[x(t_0)=8]{t=t_0} E'(t_0) = 8\cdot 3 = 24$ μον²/sec

ΘΕΜΑ 4ο

1. $f^2(x) + 2f(x)\cdot x = \ln(x\cdot e^{-x})\cdot \ln(x\cdot e^{x})$

$$= \left[\ln x + \ln e^{-x}\right]\cdot\left[\ln x + \ln e^{x}\right]$$

$$= \left[\ln x - x\right]\cdot\left[\ln x + x\right]$$

$\overset{4}{\Rightarrow} f^2(x) + 2f(x)\cdot x = \ln^2 x - x^2$

$\Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x)\cdot x + x^2 = \ln^2 x$

$\Leftrightarrow (f(x)+x)^2 = \ln^2 x \Leftrightarrow \boxed{|f(x)+x| = |\ln x|}$ (1)

Έστω $g(x) = f(x)+x$ (συνεχής ως πράξεις συνεχών)

Τότε $\boxed{|g(x)| = |\ln x|}$ (2)

Αν $g(x) = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} |\ln x| = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- Άρα για $x\in(1,+\infty)$ η $g(x)\neq 0 \xrightarrow{\text{συνεχής}}$ έχει σταθερό πρόσημο

  $g(e) = f(e)+e = 1-e+e = 1$ Άρα $g(x)>0$ για $x>1$

  $(2) \Rightarrow g(x) = \ln x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \ln x - x \text{ για } x\geq 1}$

- Άρα για $x\in(0,1)$ η $g(x)\neq 0 \xrightarrow{\text{συνεχής}}$ έχει σταθερό πρόσημο

  $g(e^{-1}) = f(e^{-1}) + e^{-1} = -1 - e^{-1} + e^{-1} = -1$ Άρα $g(x)<0$ για $x<1$

  $(2) \Rightarrow -g(x) = -\ln x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \ln x - x \text{ για } 0<x<1}$

Τελικά: $f(x) = \ln x - x$, $x>0$

2. Πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)$

$$\blacktriangleright \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 = \lambda$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - x + x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

οπότε δεν υπάρχει πλάγια (ή οριζόντια) ασύμπτωτη στο $+\infty$

Κατακόρυφη ασύμπτωτη

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} (\ln x - x) = -\infty$

οπότε η $\boxed{x=0}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

3. Απο υπόθεση η g συνεχής στο $[1,3]$, $g(1)\cdot g(3) < 0$. Απο Θ Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1,3)$: $g(x_0) = 0$

Εστω $h(x) = g(x) + x^3$

Η h συνεχής στο $[1,3]$ ως πράξεις συνεχών

$h(1) = g(1) + 1 = -2$

$h(3) = g(3) + 27 = 55$

$h(1)h(3) < 0$

Απο Θ.Bolzano υπάρχει $x_1 \in (1,3)$:

$h(x_1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{g(x_1) = -x_1^3}$ ①

Εστω $K(x) = g(x) - x$

Η K συνεχής στο $[1,3]$ ως πράξεις συνεχών

$K(1) = g(1) - 1 = -4$

$K(3) = g(3) - 3 = 25$

$K(1)K(3) < 0$

Απο Θ.Bolzano υπάρχει $x_2 \in (1,3)$:

$K(x_2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{g(x_2) = x_2}$ ②

Απο ① ② $\Rightarrow g(x_1)\cdot g(x_2) = -x_1^3 x_2 \Leftrightarrow \boxed{g(x_1)g(x_2) + x_1^3 x_2 = 0}$

4. Αρκεί $f(g^2(x)+x^2+1) \leq f(g^2(x)+2x) - x^2+3x-3+\frac{1}{x}$

Η ισότητα ισχύει για $x=1$.

Για $x\neq 1$: Ισχύει $\cancel{g^2(x)}+x^2+1 > \cancel{g^2(x)}+2x$

$\Leftrightarrow x^2+1>2x \Leftrightarrow (x-1)^2>0$.

Απο ΘΜΤ στο $[g^2(x)+2x, g^2(x)+x^2+1]$ $\exists\, \xi \in (g^2(x)+2x, g^2(x)+x^2+1)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(g^2(x)+x^2+1)-f(g^2(x)+2x)}{g^2(x)+x^2+1-g^2(x)-2x} = \frac{f(g^2(x)+x^2+1)-f(g^2(x)+2x)}{x^2-2x+1}$$

όμως $f(x)=\ln x - x$, $f'(x)=\frac{1}{x}-1$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f' \downarrow$

Απο το ΘΜΤ ισχύει $\xi\in(g^2(x)+2x, g^2(x)+x^2+1)$ οπότε

$\xi > g^2(x)+2x > 2x > x \quad (x>0)$

Αρα $\xi > x \overset{f' \downarrow}{\Longleftrightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(g^2(x)+x^2+1)-f(g^2(x)+2x)}{x^2-2x+1} < \frac{1}{x}-1$

$\Leftrightarrow f(g^2(x)+x^2+1)-f(g^2(x)+2x) < (x^2-2x+1)\left(\frac{1}{x}-1\right) =$

$= x-x^2-2+2x+\frac{1}{x}-1$

$= -x^2+3x-3+\frac{1}{x}$

Έτσι $f(g^2(x)+x^2+1)-f(g^2(x)+2x) < -x^2+3x-3+\frac{1}{x}$

και η ισότητα ισχύει για $x=1$.