ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
3/2/2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΙΑ

Α2. ① Α

② Αφού η f ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΗ ΤΟΤΕ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ 1-1 άρα $x_1 \neq x_2$ με $f(x_1) = f(x_2)$

f ΠΑΡ/ΜΗ ΣΤΟ $[x_1, x_2]$ άρα f ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ $[x_1, x_2]$

ΕΠΙΣΗΣ $f(x_1) = f(x_2)$ άρα ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΙΣ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΟΥ Θ. Rolle

Α3. ⓓ

Α4 1. Λ 2. Σ 3. Λ 4 Σ 5. Λ

ΘΕΜΑ Β

① $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{-1+x^2}{x^2}$

x	-1		0		1	
$f'(x)$	$+$ 0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	↘	‖	↘		↗
	Τ.Μ				Τ.Ε.	

- f ↗ στο $(-\infty, -1]$
- f ↘ στο $[-1, 0)$
- f ↘ στο $(0, 1]$
- f ↗ στο $[1, +\infty)$

ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ: $f(-1) = -1-1 = -2$

ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ: $f(1) = 2$

② f' ΠΑΡ/ΜΗ ΩΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΑΡ/ΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

με $f''(x) = \frac{1}{x^4} \cdot 2x = \frac{2}{x^4} \cdot x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$

③ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 + \infty = +\infty$

άρα $\boxed{x=0}$ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

άρα $y = x$ πλαγια στο $+\infty$ ομοια κ' στο $-\infty$

(4) $E(\Omega) = \int_1^2 |f(x)|\,dx = \int_1^2 \left|x + \frac{1}{x}\right| dx =$

$$\overset{x>0}{=} \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} + \ln 2 = \ln 2 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

(1) Θεωρω $h(x) = f(x) - \alpha - \beta + x$

$$\left.\begin{aligned} h(\alpha) &= f(\alpha) - \alpha - \beta + \alpha = \alpha - \beta < 0 \\ h(\beta) &= f(\beta) - \alpha - \beta + \beta = \beta - \alpha > 0 \end{aligned}\right\rangle h(\alpha)h(\beta) < 0$$

Θ. Bolzano

(2) $(\varepsilon): \; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$(0,0) \in (\varepsilon) \Rightarrow 0 - f(x_0) = f'(x_0)(-x_0)$

$\Leftrightarrow - f(x_0) = - x_0 f'(x_0)$

$\Leftrightarrow - f(x_0) + x_0 f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$

Για $x_0 \leftrightarrow x$: $\quad x f'(x) - f(x) = 0$

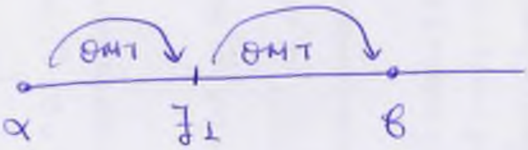
$$\Leftrightarrow \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$$

Θεωρω $K(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

$$\left.\begin{aligned} K(\alpha) &= \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \\ K(\beta) &= \frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{\beta}{\beta} = 1 \end{aligned}\right\rangle K(\alpha) = K(\beta) = 1$$

Θ. Rolle ...

(3)



f παρ/μη στο $[\alpha, \xi_1]$ άρα ΘΜΤ $\exists\, \xi_2 \in (\alpha, \xi_1)$:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\xi_1) - \alpha}{\xi_1 - \alpha} = \frac{\cancel{\alpha} + \beta - \xi_1 - \cancel{\alpha}}{\xi_1 - \alpha} = \frac{\beta - \xi_1}{\xi_1 - \alpha}$$

f παρ/μη στο $[\xi_1, \beta]$ άρα ΘΜΤ $\exists\, \xi_3 \in (\xi_1, \beta)$:

$$f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f(\xi_1)}{\beta - \xi_1} = \frac{\cancel{\beta} - \alpha - \cancel{\beta} + \xi_1}{\beta - \xi_1} = \frac{\xi_1 - \alpha}{\beta - \xi_1}$$

• $f'(\xi_1) f'(\xi_2) = \dfrac{\beta - \xi_1}{\xi_1 - \alpha} \cdot \dfrac{\xi_1 - \alpha}{\beta - \xi_1} = 1$

(4) $x f''(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow x f''(x) + f'(x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x f'(x) - x)' = 0$

Θεωρώ $h(x) = x f'(x) - x$

$$\left.\begin{array}{l} h(\alpha) = \alpha f'(\alpha) - \alpha \\ h(\beta) = \beta f'(\beta) - \beta \end{array}\right\rangle h(\alpha) = h(\beta)^{**} \quad \text{Θ. Rolle}$$

** Έχουμε, $\int_\alpha^\beta x f''(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \left[x f'(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = 0$

$\Leftrightarrow \beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha) - \left[f(x)\right]_\alpha^\beta = 0$

$\Leftrightarrow \beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha) - f(\beta) + f(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \beta f'(\beta) - \beta = \alpha f'(\alpha) - \alpha \Leftrightarrow h(\beta) = h(\alpha)$

ΘΕΜΑ Δ

(1) $g'(x) = \ln x + 1$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$	

(α)

• ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ:

$g \downarrow$ στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$

$g \uparrow$ στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} - 1 = -\frac{1}{e} - 1$

(b)

• g συνεχής κ $\uparrow$ στο $(1,+\infty)$ άρα $g\big((1,+\infty)\big) = \left(\lim\limits_{x\to 1^+} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right)$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}(x\ln x - 1) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x - 1) = +\infty - 1 = +\infty$

Οπότε $g\big((1,+\infty)\big) = (-1,+\infty)$

Αφού $0 \in g\big((1,+\infty)\big)$ η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλ. ρίζα στο $(1,+\infty)$ κ' εφόσον $g \uparrow$ τότε είναι ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ

(2) ...

• $g(x) = -\frac{1}{e} - 1$

Από (1) ερώτημα έχουμε $g(x) \geq g(1/e) \Leftrightarrow g(x) \geq -\frac{1}{e} - 1$

και το ίσον ισχύει μόνο όταν $x = \frac{1}{e}$ άρα η εξίσωση $g(x) = -\frac{1}{e} - 1$ έχει μοναδική λύση $\frac{1}{e}$

Άρα $E(\Omega) = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left| g(x) + \frac{1}{e} + 1 \right| dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(x\ln x - 1 + \frac{1}{e} + 1\right) dx$

$= \int_{1/e}^{1} \left(x\ln x + \frac{1}{e}\right) dx = \int_{1/e}^{1} x\ln x\, dx + \frac{1}{e}\big[x\big]_{1/e}^{1} = \dots = \frac{-e^2 + 4e - 1}{4e^2}$

(3)

• $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{y^2}\left(\int_0^1 e^{x-t}\, g'\left(\frac{1}{y}\right) dt\right) dy =$

$\displaystyle = \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{1}{y^2}\, g'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\int_0^1 e^{x-t}\, dt\right) dy =$

$\displaystyle = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{g'\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}\, dy\cdot\int_0^1 e^{x}\cdot e^{-t}\, dt = e^x\cdot\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{g'\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}\, dy\cdot\int_0^1 e^{-t}\, dt$

▷ $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^1 = -e^{-1}+e^0 = -\frac{1}{e}+1 = \frac{-1+e}{e} = \frac{e-1}{e}$

▷ $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} g'\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\, dy = \left[-g\left(\frac{1}{y}\right)\right]_{1/e}^{1} =$

$= g(e) - g(1) = e - 1 + 1 = e$

Άρα $(e-1)\ln x\cdot f(x) = e^x\,\frac{e-1}{\cancel{e}}\cdot\cancel{e} \iff \ln x\, f(x) = e^x$

$\iff f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x}\ , \ x>1$

(4.) $\displaystyle f'(x) = \frac{e^x\ln x - \frac{e^x}{x}}{\ln^2 x} = \frac{e^x\,(x\ln x - 1)}{\ln^2 x} = \frac{e^x\cdot g(x)}{\ln^2 x}$

Το πρόσημο της f' επηρεάζεται από την $g(x)$

Από το (1) ερώτημα έχουμε: g

$\exists\ x_0>1 :\ g(x_0)=0$

$1 \leftarrow x \rightarrow \quad x_0 \longleftrightarrow \quad +\infty$

• $1 < x < x_0 \overset{g \uparrow}{\iff} g(x) < g(x_0) \iff g(x) < 0$

$\Rightarrow f'(x) < 0$ άρα $f \downarrow$ στο $(1, x_0)$

• $x > x_0 \overset{g \uparrow}{\iff} g(x) > g(x_0) \iff g(x) > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ άρα $f \uparrow$ στο $(x_0, +\infty)$

x	1		x_0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘		↗	

Ο.Ε. $\rightarrow$ $f(x_0) = \dfrac{e^{x_0}}{\ln x_0}$

Επίσης $g(x_0) = 0 \iff x_0 \ln x_0 - 1 = 0$

$\iff \ln x_0 = \dfrac{1}{x_0}$

άρα $f(x_0) = \dfrac{e^{x_0}}{\frac{1}{x_0}} = e^{x_0} \cdot x_0$