Εν δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ: 24/2/2018

ΘΕΜΑ 1ο

(Α) i) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 2$

ii) $\left.\begin{array}{l} \cdot \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 \\ \cdot \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists$ το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

iii) $\left.\begin{array}{l} \cdot \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3 \\ \cdot \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

iv) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3$

v) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 3$

(Β) i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+x+3)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \dfrac{9}{3} = 3$

ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2-4}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \dfrac{1}{16}$

iii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|2f(x)-11|}{f^2(x)+1} = \dfrac{|2\cdot 4-11|}{4^2+1} = \dfrac{3}{17}$

(Γ) i) $\cdot \lim\limits_{x\to 1}(x+2) = 3$, άρα $x+2>0$ κοντά στο 1

$\cdot \lim\limits_{x\to 1}(x+3) = 4$, άρα $x+3>0$ κοντά στο 1

Άρα: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x+2|+|x+3|-7}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2+x+3-7}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{x^2-x} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2(x-1)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{x} = 2$

ii) • $\lim_{x\to 1}(x^2+2)=3$, άρα $x^2+2>0$ κοντά στο 1

x		-1		1	
$1-x$	+		+	0	−
x^2-1	+	0	−	0	+

• $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{|1-x|+x|x^2+2|-3}{|x^2-1|}=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{1-x+x(x^2+2)-3}{-(x^2-1)}=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{1-x+x^3+2x-3}{-(x-1)(x+1)}=$

$=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{x^3+x-2}{-(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)}{-\cancel{(x-1)}(x+1)}=\dfrac{4}{-2}=-2$ //

• $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{|1-x|+x|x^2+2|-3}{|x^2-1|}=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{x-1+x(x^2+2)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{x-1+x^3+2x-3}{x^2-1}=$

$=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{x^3+3x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+4)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\dfrac{6}{2}=3$ //

Άρα το όριο δεν υπάρχει.

ΘΕΜΑ 2ο

(A) i) Έχουμε: $\lim_{x\to 1}f(x)=5 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=5$

Είναι: $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(g(x)-x^2+x+2)=5$

Θέτουμε: $\omega(x)=g(x)-x^2+x+2$, με $\lim_{x\to 1^+}\omega(x)=5$

άρα: $g(x)=\omega(x)+x^2-x-2$

άρα $\lim_{x\to 1^+}g(x)=\lim_{x\to 1^+}(\omega(x)+x^2-x-2)=5+1-1-2=3$ //

ii) Έχουμε: $\lim_{x\to 1^-}f(x)=5 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\dfrac{ax^2+\beta x-4}{x-1}=5$

Θέτουμε: $h(x)=\dfrac{ax^2+\beta x-4}{x-1}$ με $\lim_{x\to 1^-}h(x)=5$

άρα: $ax^2+\beta x-4=(x-1)\cdot h(x)$

άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2+\beta x-4)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)\cdot h(x) \Leftrightarrow$

$a+\beta-4=(1-1)\cdot 5 \Leftrightarrow$

$a+\beta-4=0 \Leftrightarrow \beta=4-a$ (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax^2+\beta x-4}{x-1} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax^2+(4-a)x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax^2+4x-ax-4}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax(x-1)+4(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax+4)=a+4$

Άρα πρέπει: $a+4=5 \Leftrightarrow \boxed{a=1}$

Από (1) $\Leftrightarrow \beta=4-1 \Leftrightarrow \boxed{\beta=3}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-6f(x)+5}{\sqrt{6-f(x)}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(f(x)-1)(f(x)-5)\cdot(\sqrt{6-f(x)}+1)}{6-f(x)-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(f(x)-1)\cancel{(f(x)-5)}\cdot(\sqrt{6-f(x)}+1)}{-\cancel{(f(x)-5)}}=\lim\limits_{x\to 1}(1-f(x))(\sqrt{6-f(x)}+1)=$

$=(1-5)\cdot(\sqrt{6-5}+1)=-8$

iv) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}(g(x)+2)=3+2=5$, άρα $g(x)+2>0$ κοντά στο 1^+

Άρα: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|g(x)+2|-g(x)-x^2-1}{x^3-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)+2-g(x)-x^2-1}{x^3-2x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-(x^2-1)}{(x-1)(x^2+x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x-1)}=\dfrac{-2}{1}=-2$

Β) Είναι: $\lim_{x\to 1}\frac{3\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3\sqrt{x}-3+\sqrt{x+3}-2}{x-1}=$

$$=\lim_{x\to 1}\left(3\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}+\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[3\cdot\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}+\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Ⓐ Θεωρία, Σχολ. Βιβλίο → σελ. 134

Ⓑ Θεωρία, Σχολ. Βιβλίο → σελ. 135

Ⓖ 1. Λάθος — 8. Σωστό

2. Λάθος — 9. Σωστό

3. Σωστό — 10. Σωστό

4. Σωστό — 11. Λάθος

5. Λάθος — 12. Λάθος

6. Σωστό — 13. Σωστό

7. Σωστό — 14. Λάθος

ΘΕΜΑ 4ο

(A) Είναι: $P(x) = \lambda(3\lambda-2)(3\lambda+2)\cdot x^3 + (3\lambda-2)(3\lambda+2)\cdot x^2 - 3\lambda + 2$

- Αν $\lambda(3\lambda-2)(3\lambda+2) \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq \frac{2}{3}$ και $\lambda \neq -\frac{2}{3}$ τότε το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού.
- Αν $\lambda = 0$, τότε $P(x) = -4x^2 + 2$: 2ου βαθμού
- Αν $\lambda = \frac{2}{3}$, τότε $P(x) = 0$: δεν ορίζεται βαθμός
- Αν $\lambda = -\frac{2}{3}$, τότε $P(x) = 4$: μηδενικού βαθμού

(B) Είναι: $\underbrace{x^3 + 2x^2 - ax + \beta}_{3ου} = \underbrace{(x^2+1)}_{2ου}\,\pi(x) + \underbrace{8x+4}_{1ου}$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - ax + \beta = (x^2+1)(\gamma x + \delta) + 8x + 4$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - ax + \beta = \gamma x^3 + \delta x^2 + \gamma x + \delta + 8x + 4$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - ax + \beta = \gamma x^3 + \delta x^2 + (\gamma + 8)\cdot x + \delta + 4$

$\Leftrightarrow 1 = \gamma$ και $2 = \delta$ και $-a = \gamma + 8$ και $\beta = \delta + 4$

$-a = 1 + 8 \qquad \beta = 2 + 4$

$\boxed{a = -9} \qquad \boxed{\beta = 6}$

(Γ) i) Είναι $x^2 + 2x - 3 = (x-1)\cdot(x+3)$

άρα το $f(x)$ θα έχει παράγοντες το $x-1$ και το $x+3$

$\left.\begin{matrix} f(1)=0 \\ f(-3)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 1 + a + \beta - 22 + 6a = 0 \\ 81 - 27a + 9\beta + 66 + 6a = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 7a + \beta = 21 \\ -21a + 9\beta = 147 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 7a + \beta = 21 \\ -7a + 3\beta = 49 \end{matrix}\right\} (+)$

$\Rightarrow 4\beta = -28 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -7}$

Έχουμε: $7a + \beta = 21 \Leftrightarrow 7a - 7 = 21 \Leftrightarrow 7a = 28 \Leftrightarrow \boxed{a = 4}$

ii) Έχουμε $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24$

Με ψψ: $f(0) = 24$ άρα $A(0, 24)$

ii) Με χχ: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^4+4x^3-7x^2-22x+24=0$ ①

1	4	-7	-22	24	1
	1	5	-2	-24	
1	5	-2	-24	0	

Από (1) $\Leftrightarrow (x-1)(x^3+5x^2-2x-24)=0$ ②

1	5	-2	-24	-3
	-3	-6	24	
1	2	-8	0	

Από (2) $\Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x^2+2x-8)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x-4)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-3$ ή $x=4$ ή $x=-2$

Άρα τα σημεία: $B(1,0)$, $\Gamma(-3,0)$, $\Delta(4,0)$, $E(-2,0)$

Δ) Έχουμε: $(x^2+x-5)^3-5(x^2+x-4)^2-7(x^2+x)+61=0$

Θέτουμε: $x^2+x-5=\omega$

άρα: $\omega^3-5(\omega+1)^2-7(\omega+5)+61=0 \Leftrightarrow$

$\omega^3-5(\omega^2+2\omega+1)-7\omega-35+61=0 \Leftrightarrow$

$\omega^3-5\omega^2-10\omega-5-7\omega+26=0 \Leftrightarrow$

$\omega^3-5\omega^2-17\omega+21=0$ ①

1	-5	-17	21	1
	1	-4	-21	
1	-4	-21	0	

Από (1) $\Leftrightarrow (\omega-1)(\omega^2-4\omega-21)=0$

$\Leftrightarrow (\omega-1)(\omega-7)(\omega+3)=0$

$\Leftrightarrow \omega=1$ ή $\omega=7$ ή $\omega=-3$

$\Leftrightarrow x^2+x-5=1$ $\quad x^2+x-5=7$ $\quad x^2+x-5=-3$

$\Leftrightarrow x^2+x-6=0$ $\quad x^2+x-12=0$ $\quad x^2+x-2=0$

$\Leftrightarrow \boxed{x=-3}$ ή $\boxed{x=2}$ $\quad \boxed{x=-4}$ ή $\boxed{x=3}$ $\quad \boxed{x=-2}$ ή $\boxed{x=1}$

(Ε) Έχουμε: $P(1)=14$ και $P(-2)=2$

Η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2+x-2 είναι:

$$P(x)=\underbrace{(x^2+x-2)}_{2^{ου}}\cdot \pi(x)+\upsilon(x)$$

$\upsilon(x)$ ↳ το πολύ $1^{ου}$

$$P(x)=(x+2)(x-1)\pi(x)+ax+\beta$$

Έχουμε: $\left.\begin{matrix}P(1)=14\\P(-2)=2\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}(1+2)\cdot(1-1)\cdot\pi(1)+a+\beta=14\\(-2+2)\cdot(-2-1)\pi(-2)+a(-2)+\beta=2\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}a+\beta=14\\-2a+\beta=2\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix}a=14-\beta\\-2(14-\beta)+\beta=2\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}a=14-\beta\\-28+2\beta+\beta=2\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}a=14-\beta\\3\beta=30\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix}a=4\\\beta=10\end{matrix}$$

Άρα $\boxed{\upsilon(x)=4x+10}$