Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

17/03/18

ΖΗΤΗΜΑ Α

A3) i) Σ ii) Λ iii) Λ iv) Λ v) Σ

A4) Ψ π.χ. $f(x)=x^3$, $f\uparrow$ αλλά $f'(x)=3x^2\geq 0$.

ΖΗΤΗΜΑ Β

B1) $\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\leq\dfrac{1}{2}\iff\dfrac{|x|}{x^2+1}\leq\dfrac{1}{2}\iff 2|x|\leq x^2+1\iff 2|x|\leq|x|^2+1\iff$
$|x|^2+1-2|x|\geq 0\iff(|x|-1)^2\geq 0$

ισχύει

B2) Αν $\alpha=\beta$ η σχέση ισχύει ως ισότητα

Έστω $\alpha<\beta$

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$ έχουμε

$f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\iff\left|\dfrac{\xi}{1+\xi^2}\right|=\left|\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|\overset{(B1)}{\Longrightarrow}$

$\dfrac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{|\beta-\alpha|}\leq\dfrac{1}{2}\iff|f(\beta)-f(\alpha)|\leq\dfrac{1}{2}|\beta-\alpha|$

B3) f' παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων με $f''(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

x		-1		1	
f''	$-$		$+$		$-$
f'	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		Τ.Ε.		Τ.Μ.	

B4) f'' παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων με $f^{(3)}(x)=\dfrac{2x^3-6x}{(1+x^2)^2}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
x	$-$		$-$		$+$		$+$
x^2-3	$+$		$-$		$-$		$+$
$f^{(3)}$	$-$		$+$		$-$		$+$
f	$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$
		ΣΚ		ΣΚ		ΣΚ	

$A\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}/4\right)$

$B\left(\sqrt{3},\sqrt{3}/4\right)$ $\quad O(0,0)$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

B5) f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

άρα $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Ομοίως η $y=0$ 〃 $-\infty$

B6) $f'(x) = \frac{x}{1+x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \Leftrightarrow$

$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)'$ άρα $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$ και $f(0)=0$

άρα για $x=0 \rightarrow c=0$

$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Γ1) i) f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $M(\xi, \frac{1}{\xi})$

Εφαπτομένη στο M

$(\varepsilon): y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow y - \frac{1}{\xi} = -\frac{1}{\xi^2}(x-\xi) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\xi^2}x + \frac{2}{\xi}$

$y=0$: $x = 2\xi$ άρα $A(2\xi, 0)$

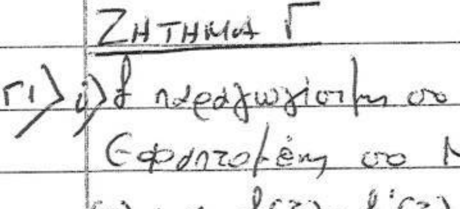
$x=0$: $y = \frac{2}{\xi}$ άρα $B(0, \frac{2}{\xi})$

Το μέσο του AB έχει συντεταγμένες

$\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ δηλαδή $(\xi, \frac{1}{\xi})$ που είναι το M

ii) $(OAB) = \frac{1}{2}|OA||OB| = \frac{1}{2}|2\xi|\left|\frac{2}{\xi}\right| = \frac{1}{2}2|\xi|\frac{2}{|\xi|} = 2$ τ.μ.

Γ2)



$\Pi = 2(O\Lambda) + 2(OK) = 2\xi + \frac{2}{\xi}$

$\Pi(x) = 2x + \frac{2}{x}$, $\Pi'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^2-1)}{x^2}$

x	0		1	
Π'	‖	$-$		$+$
Π	‖	↘	Τ.Ε.	↗

$x=1$ τότε $M(1,1)$

Παρατηρήσεις

Γ3) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\eta\mu x}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$

Θέτω $\sigma\upsilon\nu x = u \Rightarrow -\eta\mu x\,dx = du$

$x = \frac{\pi}{3}: \; u = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$

$x = \pi/6: \; u = \sigma\upsilon\nu\,\pi/6 \Leftrightarrow u = \sqrt{3}/2$

άρα $\int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{-du}{1-u^2} = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1-u^2}\,du = -\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{u^2-1}\,du$

$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1)+B(u-1)}{u^2-1} = \frac{(A+B)u + A - B}{u^2-1}$ άρα

$(A+B=0 \text{ και } A-B=1) \Leftrightarrow (B=-\frac{1}{2} \text{ και } A=\frac{1}{2})$

$-\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{u^2-1}\,du = -\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{2}\frac{1}{u-1}\,du + \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{2}\frac{1}{u+1}\,du = \frac{1}{2}\Big[\ln|u-1| + \ln|u+1|\Big]_{1/2}^{\sqrt{3}/2}$

...

ΖΗΤΗΜΑ Δ

Δ1) $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$

$[\alpha,\beta] \xrightarrow{Rolle} f'(x_1) = 0, \quad [\beta,\gamma] \xrightarrow{Rolle} f'(x_2) = 0$

Δ2) $f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma) + 2(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma) + 2(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)$

$= 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\left[3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta\right]$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=\alpha$ ή $x=\beta$ ή $x=\gamma$ ή $x=x_1$ ή $x=x_2$

x		α		x_1		β		x_2		γ	
$x-\alpha$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x-\beta$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-\gamma$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
f'	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$
f	$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$

13) i) Αφού οι θέσεις τοπικών ελαχίστων είναι -1, 0 και 1 τότε
$\alpha=-1$, $\beta=0$, $\gamma=1$

$f(x)=(x+1)^2x^2(x-1)^2=\left[(x+1)x(x-1)\right]^2=\left[(x^2-1)x\right]^2=$
$(x^3-x)^2=x^6-2x^4+x^2$

άρα $f(x)=x^6-2x^4+x^2$

ii) $\displaystyle\int_1^e f(x)\cdot \ln x\,dx=\int_1^e\left(x^6-2x^4+x^2\right)\ln x\,dx=$

$\displaystyle\int_1^e\left(\frac{x^7}{7}-2\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)'\ln x\,dx=$

$\displaystyle\left[\frac{x^7}{7}-2\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^7}{7}-2\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\frac{1}{x}\,dx=\dots$

$\displaystyle\frac{6e^7}{49}-\frac{8e^5}{25}+\frac{2e^3}{9}+\frac{206}{3675}$

14) g συνεχής στο $[0,1]$ άρα έχει μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή
δηλαδή υπάρχουν $\kappa,\lambda\in[0,1]$ τ.ω. $g(\kappa)\le g(x)\le g(\lambda)$ $\forall x\in[0,1]$

Αν $\kappa,\lambda\in(0,1)$ τότε από Θ. Fermat $g'(\kappa)=g'(\lambda)=0$

$f(x)g'(x)+g(x)=2$ ①

$x=\kappa$: $f(\kappa)\cdot g'(\kappa)+g(\kappa)=2 \Leftrightarrow g(\kappa)=2$
$x=\lambda$: $f(\lambda)\cdot g'(\lambda)+g(\lambda)=2 \Leftrightarrow g(\lambda)=2$
$\Big\}$ $g_{max}=g_{min}$ άρα g σταθερή

Αν $\kappa=0$ και $\lambda\in(0,1)$ τότε

① $x=0$: $f(0)\cdot g'(0)+g(0)=2 \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} g(0)=2$
① $x=\lambda$: $f(\lambda)\cdot g'(\lambda)+g(\lambda)=2 \Leftrightarrow g(\lambda)=2$
$\Big\}$ $g_{max}=g_{min}$ άρα g σταθερή

Αν $\kappa=0$ και $\lambda=1$ ή αντίστροφα

① $x=0$: $f(0)g'(0)+g(0)=2 \Leftrightarrow g(0)=2$
① $x=1$: $f(1)g'(1)+g(1)=2 \overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} g(1)=2$
$\Big\}$ $g_{max}=g_{min}$ άρα g σταθερή