1. ✉ΟύλωφΠάλμε& Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

Διαγώνισμα Γ λυκείου Μαθηματικά (3 – 2 - 2018)

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in R$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c, c\in R$

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

1. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

Α3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση :

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha,\beta] \to R$, αν ισχύει $f(\alpha)f(\beta)>0$, τότε

a) η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α,β).
b) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).
c) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).
d) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α,β).

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)dx$$

2. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

3. Ισχύει $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ με f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$

4. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σ ημεία της f στο διάστημα Δ.

5. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

(7- 4 - 4- 10 μονάδες)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

2. Να εξηγήσετε γιατί η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη R^* και να βρείτε το πρόσημο της δεύτερης παραγωγού.

3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωριού που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ,τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$.

(7- 6 - 7- 5 μονάδες)

1. ✉Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

Θέμα Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[a,\beta]\to R$, με $f(a)=a,\ f(\beta)=\beta$, 0<α<β

Να αποδείξετε ότι:

1. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1)=\alpha+\beta-\xi_1$

2. Υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

3. Υπάρχουν $\xi_2,\xi_3\in(\alpha,\beta)$, $\xi_2<\xi_3$ τέτοια ώστε $f'(\xi_2)\cdot f'(\xi_3)=1$

4. Αν υπάρχει η f'' στο [α, β], είναι συνεχής και ισχύει $\int_\alpha^\beta x\cdot f''(x)dx=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\cdot f''(x)+f'(x)=1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

(5- 6 - 7- 7 μονάδες)

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:(1,+\infty)\to R$ και $g(x)=xlnx-1$, $x>0$ και ισχύει :

$$(e-1)\cdot lnx\cdot f(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{y^2}\cdot\left(\int_0^1 e^{x-t}\cdot g'\left(\frac{1}{y}\right)dt\right)dy\,,\qquad x>1$$

1.

a) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο πεδίο ορισμού της .

b) Να αποδείξετε ότι στο $(1,+\infty)$ η εξίσωση $g(x)=0$ παρουσιάζει μοναδική ρίζα.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωριού που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g ,την ευθεία $y=-\frac{1}{e}-1$ και την ευθεία $x=1$.

3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{e^x}{lnx}$, $x>1$.

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0>1$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση f να λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της όταν $x=x_0$ και επιπλέον ισχύει $f(x_0)=x_0e^{x_0}$

(7 - 5 - 6- 7 μονάδες)