

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

17/03/2018

ΖΗΤΗΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και

$$\text{ισχύει } f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad (6 \mu)$$

A2. Να ορίσετε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της

$$A(x_0, f(x_0)) \text{ και να γράψετε την εξίσωσή της} \quad (5 \mu)$$

A3. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος

- i) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ
- ii) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει τρεις το πολύ ασύμπτωτες
- iii) Αν μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$, στο οποίο είναι παραγωγίσιμη, τότε $f'(x_0) = 0$
- iv) Αν f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$
- v) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών, μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f'

(10 μ)

A4. Δίνεται η παρακάτω πρόταση: «Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου, ορισμού της, τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ »

Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση ως αληθή ή ψευδή αιτιολογώντας την απάντησή σας (1-3 μ)

ΖΗΤΗΜΑ Β

B1. Να δείξετε ότι $\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}$ (2 μ)

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

B2. Να αποδείξετε ότι για όλους τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$ ισχύει $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |\beta - \alpha|$ (5 μ)

B3. Να εξετάσετε την f' ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (5 μ)

B4. Να βρείτε τα σημεία καμψής της f' (4 μ)

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
 Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
 Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
 www.en-dynamei.gr



- B5. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f' (5 μ)
- B6. Αν επιπλέον $f(0) = 0$, να βρείτε τον τύπο της f (4 μ)

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ και (ε) η εφαπτομένη της σε ένα σημείο $M(\xi, f(\xi))$

- Γ1. Αν A και B είναι τα σημεία στα οποία η (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να δείξετε ότι
 i) Το M είναι μέσο του AB
 ii) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του ξ

- Γ2. Έστω ότι από το σημείο $M(\xi, f(\xi))$, $\xi > 0$ φέρουμε παράλληλες προς τους ημάξονες Ox και Oy , που τους τέμνουν στα σημεία K και Λ αντίστοιχα. Να βρείτε το σημείο M για το οποίο η περίμετρος του ορθογωνίου MKOL είναι ελάχιστη

- Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{f(x)} dx$

(10 – 10 – 5)

ΖΗΤΗΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-a)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2$, $\alpha < \beta < \gamma$

- Δ1. Να δείξετε ότι υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ (5 μ)
- Δ2. Να δείξετε ότι η f έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα (6 μ)

- Δ3. Αν οι θέσεις των τοπικών ελαχίστων είναι -1, 0 και 1 τότε

i) Να δείξετε ότι $f(x) = x^6 - 2x^4 + x^2$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e f(x) \cdot \ln x dx$

(4 – 5 μ)

- Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει

$f(x) \cdot g'(x) + g(x) = 2$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή (5 μ)