Θέμα Α

Α1 –β , Α2 – δ , Α3 – γ , Α4 – δ , Α5 α – Λ, β – Σ , γ – Σ , δ – Λ , ε – Λ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η ροπή αδράνειας του δίσκου 1 ως προς τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το κέντρο μάζας του θα υπολογιστεί ως εξής:

$I_{A} = I_{cm} + mR^2 \Rightarrow \frac{3}{2}mR^2 = I_{cm} + mR^2 \Rightarrow I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$. Άρα $I_{A} = 3I_{cm}$

Για τις στροφορμές τους ισχύει: $L_1 = I_{cm} \cdot \omega$ και $L_2 = I_{A} \cdot \omega = 3I_{cm} \cdot \omega \Rightarrow L_2 = 3L_1$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Για το μέτρο της ταχύτητα του σώματος και το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας ισχύει: $\upsilon = \upsilon_{\gamma\rho} = R\omega \rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon_{\gamma\rho}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha = \alpha_{\varepsilon R} = R\alpha_{\gamma\omega\nu}$

Για τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας ισχύει:

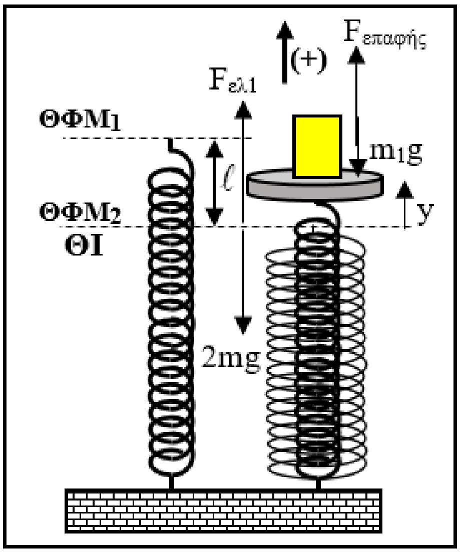
$$\frac{dL_{\tau\rho o\chi}}{dt} = \Sigma\tau_{\tau\rho o\chi} = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2}mR \cdot R\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2}mR\alpha$$

Για τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σώματος ισχύει:

$$\frac{dL_{\Sigma}}{dt} = \frac{d(m\upsilon R)}{dt} = mR\frac{d\upsilon}{dt} = mR\alpha \Rightarrow \frac{dL_{\Sigma}}{dt} = 2\frac{dL_{\tau\rho o\chi}}{dt} \Rightarrow \frac{dL_{\tau\rho o\chi}/dt}{dL_{\Sigma}/dt} = \frac{1}{2}$$

Β3. Α. Στη θέση ισορροπίας του συστήματος ελατήριο σταθεράς k_1 - δίσκος – σώμα Σ ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda 1} = (m+m)g \Rightarrow k_1\ell = 2mg \Rightarrow \ell = \frac{2mg}{k_1} = \frac{2mg}{k}$$



Σε τυχαία θέση στα θετικά ασκείται μόνο η δύναμη από το ελατήριο σταθεράς k_1 οπότε για τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ, το βάρος του και τη δύναμη επαφής από τον δίσκο, ισχύει:

$$\Sigma F_{(\Sigma)} = m \cdot \alpha \Rightarrow F_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} - mg = -m \cdot \omega^2 y \Rightarrow .$$

$$F_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} = mg - m \cdot \omega^2 y$$

Όταν χαθεί η επαφή έχουμε:

$$F_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} = 0 \Rightarrow m \cdot \omega^2 y = mg \Rightarrow$$

$$y = \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\frac{k_1}{m+m}} \Rightarrow y = \frac{2mg}{k_1} = \ell$$

άρα η επαφή θα χαθεί στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου σταθεράς k_1 ΘΦΜ$_1$.

Κάτω από τη ΘΦΜ$_2$ το σώμα δε χάνει την επαφή του από τον δίσκο γιατί ισχύει:

$$\Sigma F'_{(\Sigma)} = m \cdot \alpha' \Rightarrow F'_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} - mg = -m \cdot \omega'^2 y' \Rightarrow F'_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} = mg - m \cdot \omega'^2 y' = mg - m \cdot \frac{D'}{m+m}y' \Rightarrow$$

$F'_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} = mg - m \cdot \frac{D'}{2m}y' \Rightarrow F'_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} = mg - \frac{1}{2}D'y'$ όπου $y' < 0 \rightarrow F'_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} > 0$ άρα δε χάνει επαφή (θετικά του άξονα ταλάντωσης έχουμε προς τα πάνω και για την απλή αρμονική ταλάντωση του συστήματος των δύο ελατηρίων – σώμα Σ – δίσκος η σταθερά επαναφοράς κάτω από τη ΘΦΜ$_2$ είναι $D' = k_1 + k_2 = 2k$).

Β. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Λόγω της παραμόρφωσης $d=\ell$ το σύστημα ελατήρια – σώμα Σ – δίσκος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A'=d=\ell$ και σταθερά επαναφοράς $D'=k_1+k_2=2k$. Όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας (ΘΦΜ2) έχει ταχύτητα $\upsilon'_{\max}=\omega' A'=\sqrt{\frac{D'}{m_1+m_2}}\cdot\ell=\sqrt{\frac{2k}{2m}}\cdot\ell\Rightarrow\upsilon'_{\max}=\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\ell$.

Πάνω από τη ΘΦΜ2 το σύστημα ελατήριο σταθεράς k_1 - σώμα Σ – δίσκος εκτελεί ταλάντωση με σταθερά $D=k_1=k$, νέο πλάτος A και νέα γωνιακή συχνότητα $\omega=\sqrt{\frac{D}{m+m}}=\sqrt{\frac{k_1}{2m}}=\sqrt{\frac{k}{2m}}$.

Στη θέση ισορροπίας (ΘΦΜ2) για τη μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης ισχύει:

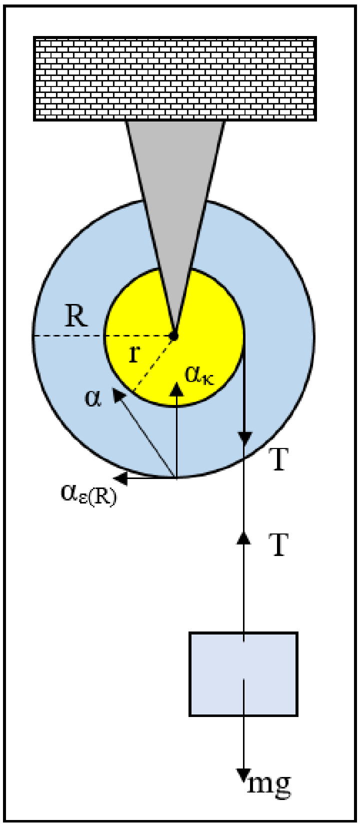
$$\upsilon_{\max}=\upsilon'_{\max}\Rightarrow\omega A=\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\ell\Rightarrow\omega A=\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\ell\Rightarrow\sqrt{\frac{k}{2m}}A=\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\ell\Rightarrow A=\sqrt{2}\cdot\ell$$

Για να βρούμε την ταχύτητα του σώματος Σ τη στιγμή που χάνει επαφή στη ΘΦΜ1 εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ για την ταλάντωση του συστήματος ελατήριο σταθεράς k_1 - σώμα Σ – δίσκος :

$$E=K+U\Rightarrow\frac{1}{2}DA^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2+\frac{1}{2}D\ell^2\Rightarrow k_1A^2=2m\upsilon^2+k_1\ell^2\Rightarrow kA^2=2m\upsilon^2+k\ell^2\Rightarrow$$

$$\upsilon^2=\frac{kA^2-k\ell^2}{2m}\Rightarrow\upsilon=\sqrt{\frac{k}{2m}\left(A^2-\ell^2\right)}=\sqrt{\frac{k}{2m}\left(2\ell^2-\ell^2\right)}=\sqrt{\frac{k}{2m}\ell^2}\Rightarrow\upsilon=\sqrt{\frac{k}{2m}}\ell$$

Θέμα Γ



Γ1. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος τροχαλία – σώμα ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας είναι:

$$\frac{d\vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt}=\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi\omega\tau}\Rightarrow\frac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt}=\tau_{mg}=mg\cdot r\Rightarrow\boxed{\frac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt}=1Nm}$$

Γ2. Για το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ του σώματος και το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$ των σημείων της περιφέρειας του δίσκου ακτίνας r ισχύει:

$$\upsilon=\upsilon_{\gamma\rho}=r\omega\rightarrow\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon_{\gamma\rho}}{dt}=r\frac{d\omega}{dt}\Rightarrow\alpha=\alpha_{\varepsilon(r)}=r\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Για σώμα ΘΝΜ: $\Sigma F_y=m\alpha\Rightarrow mg-T=m\alpha$ (1)

Για τροχαλία ΘΝΣ:

$$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow\tau_T=I\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow Tr=I\frac{\alpha}{r}\Rightarrow T=\frac{I}{r^2}\alpha\ (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$mg-T+T=m\alpha+\frac{I}{r^2}\alpha\Rightarrow\left(m+\frac{I}{r^2}\right)\alpha=mg\Rightarrow\boxed{\alpha=2\frac{m}{s^2}}$$

και $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{\alpha}{r}\Rightarrow\boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu}=20\frac{rad}{s^2}}$

Γ3. Τη χρονική στιγμή $t=0,5s$ η ταχύτητα του σώματος είναι $\upsilon=\alpha t=1\frac{m}{s}$ και η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι $\omega=\frac{\upsilon}{r}=10\frac{rad}{s}$. Η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας είναι:

$$\vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau}=\vec{L}_{\tau\rho o\chi}+\vec{L}_m\Rightarrow L_{\sigma\upsilon\sigma\tau}=L_{\tau\rho o\chi}+L_m=I\omega+m\upsilon r\Rightarrow\boxed{L_{\sigma\upsilon\sigma\tau}=0,5\frac{Kg\cdot m^2}{s}}$$

Γ4. Τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου ακτίνας $R=0,2m$ έχουν επιτρόχια επιτάχυνση $\alpha_{\varepsilon(R)}=R\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}=4\dfrac{m}{s^2}$ και κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_\kappa=\dfrac{\upsilon_{\gamma\rho}^2}{R}=\dfrac{R^2\omega^2}{R}=R\omega^2=20\dfrac{m}{s^2}$.

Συνολική επιτάχυνση θα είναι: $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_{\varepsilon(R)}+\vec{\alpha}_\kappa \rightarrow$ μέτρο $\alpha=\sqrt{\alpha_{\varepsilon(R)}^2+\alpha_\kappa^2}\Rightarrow\alpha=\sqrt{416}\dfrac{m}{s^2}$

Θέμα Δ

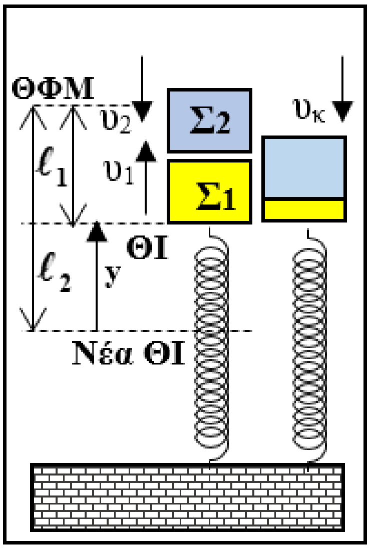
Δ1. Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 ισχύει:

$\Sigma F=0\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda 1}=m_1 g\Rightarrow k\ell_1=m_1 g\Rightarrow \ell_1=\dfrac{m_1 g}{k}=0,1m$. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 είναι $A_1=0,2m$ αφού τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνεται από την άνω ακραία θέση.

Η γωνιακή συχνότητα είναι: $D=k=m_1\omega_1^2\Rightarrow\omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{m_1}}=10\dfrac{rad}{s}$

Εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης που εκτελεί είναι: $y_1=A_1\cdot\eta\mu(\omega_1 t+\varphi_o)$ όπου τη χρονική στιγμή $t=0\rightarrow y_1=+A_1\Rightarrow\eta\mu(\varphi_o)=+1\rightarrow\varphi_o=\dfrac{\pi}{2}rad$ άρα $\boxed{y_1=0,2\cdot\eta\mu\left(10t+\dfrac{\pi}{2}\right)\ S.I}$

Δ2. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται εκτελεί ταλάντωση γύρω από νέα θέση ισορροπίας που βρίσκεται πιο κάτω από αρχική και ισχύει:



$\Sigma F'=0\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda 2}=(m_1+m_2)g\Rightarrow k\ell_2=2mg\Rightarrow\ell_2=\dfrac{2mg}{k}=0,2m$

Εφαρμόζοντας ΑΔΕΤ για τη νέα ταλάντωση που εκτελεί το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχουμε:

$$E=K+U\Rightarrow\frac{1}{2}DA_2^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_\kappa^2+\frac{1}{2}Dy^2\Rightarrow$$

$$kA_2^2=2m\upsilon_\kappa^2+ky^2\Rightarrow A_2^2=\frac{2m}{k}\upsilon_\kappa^2+y^2\Rightarrow$$

$A_2=\sqrt{\dfrac{2m}{k}\upsilon_\kappa^2+y^2}$ όπου $|y|=\ell_2-\ell_1=0,1m$ έχουμε $A_2=\sqrt{\dfrac{2}{100}\cdot 1+\dfrac{1}{100}}m\Rightarrow\boxed{A_2=0,1\sqrt{3}m}$

Δ3. Τη στιγμή της κρούσης το σώμα Σ_2 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς τα πάνω έχοντας μέτρο ταχύτητας $\upsilon_1=\upsilon_{\max}=\omega_1 A_1=2\dfrac{m}{s}$. Εφαρμόζοντας ΑΔΟ στην κρούση υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος Σ_2 πριν συγκρουστεί με το Σ_1:

$$\vec{p}_{o\lambda,\pi\rho\iota\nu}=\vec{p}_{o\lambda,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}\Rightarrow\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_{\kappa o\iota\nu\acute{\eta}}\Rightarrow m_1\upsilon_1-m_2\upsilon_2=(m_1+m_2)\upsilon_\kappa\Rightarrow 2-\upsilon_2=2\cdot 1\Rightarrow\upsilon_2=4\frac{m}{s}$$

Για να υπολογίσουμε την κατακόρυφη απόσταση H που διανύει το σώμα Σ_2 κατεβαίνοντας εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ: $K_{2,\tau\varepsilon\lambda}-K_{2,\alpha\rho\chi}=W_{m_2 g}\Rightarrow\dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2^2-0=m_2 gH\Rightarrow H=\sqrt{\dfrac{\upsilon_2^2}{2g}}\Rightarrow\boxed{H=0,8m}$

Δ4. Μόλις κοπεί το νήμα το σώμα Σ1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K}} = \frac{\pi}{5}s$ και το Σ2 εκτελεί ελεύθερη πτώση. Το σώμα Σ1 ξεκινά την κίνησή του από την άνω ακραία θέση, τη ΘΦΜ, έχοντας πλάτος $A_1' = \ell_1 = 0{,}1m$. Από το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου για τις ταλαντώσεις τόσο του σώματος Σ1 όσο και του συσσωματώματος συμπεραίνουμε ότι η κρούση μεταξύ των σωμάτων συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{10}s$, όταν το σώμα Σ1 έχει για πρώτη φορά μηδενική ταχύτητα (μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$), δηλαδή όταν βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση του. Τα σώματα κινούνται για τον ίδιο χρόνο μέχρι να συγκρουστούν. Αμέσως μετά την κρούση η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι $\upsilon_\kappa' = -\upsilon_{\max}'$ που σημαίνει ότι το συσσωμάτωμα στη νέα ταλάντωση που θα εκτελεί ξεκινά από τη νέα θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα κάτω (προς την αρνητική φορά). Μέχρι να συμβεί η κρούση το σώμα Σ2 κινούμενο κατακόρυφα για χρόνο $t = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{10}s$ διανύει απόσταση $y_2 = d + 2A_1'$.

Ισχύει $y_2 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{T_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}10\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 m = \frac{1}{2}10\frac{\pi^2}{100}m = \frac{1}{2}10\frac{10}{100}m \Rightarrow y_2 = 0{,}5m$

Άρα το μήκος του νήματος είναι $d = y_2 - 2A_1' = 0{,}5m - 2\cdot 0{,}1m \Rightarrow \boxed{d = 0{,}3m}$

Δ5. Η ταχύτητα του σώματος Σ2 πριν την κρούση είναι $\upsilon_2 = g\,t = g\frac{T_1}{2} = 10\frac{\pi}{10}\frac{m}{s} = \pi\frac{m}{s}$.

Το σώμα Σ1 βρίσκεται στη ακραία θέση άρα δεν έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = 0$. Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση έχει μέτρο ταχύτητας $|\upsilon_\kappa'| = \upsilon_{\max}'$ και γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης $\omega = \sqrt{\frac{D}{m_{o\lambda}}} = \sqrt{\frac{k}{2m}} = 5\sqrt{2}\frac{rad}{s}$. Εφαρμόζοντας ΑΔΟ στην κρούση έχουμε: $\vec{p}_{o\lambda,\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{o\lambda,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{\kappa o\iota\nu\acute{\eta}} \Rightarrow 0 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)|\upsilon_\kappa'| \Rightarrow |\upsilon_\kappa'| = \frac{\pi}{2}\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_{\max}' = \frac{\pi}{2}\frac{m}{s} \Rightarrow \omega\cdot A = \frac{\pi}{2}\frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$5\sqrt{2}\cdot A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{2\cdot 5\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\pi\sqrt{2}}{20}m}$$