Θέμα Α

Α1 – β , Α2 – γ , Α3 – β , Α4 – β , Α5 α – Σ, β – Σ , γ – Λ , δ – Σ , ε – Σ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Το πλάτος της σύνθετης κίνησης του σώματος μηδενίζεται τέσσερις φορές κάθε δευτερόλεπτο άρα η συχνότητα του διακροτήματος είναι $f_\delta = f_1 - f_2 = 4Hz$ (1). Σε μια περίοδο της κίνησης $(\overline{T})$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του δύο φορές. Στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους $(\Delta t = T_\delta)$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του $N = 100$ φορές οπότε ισχύει: $N = \frac{2T_\delta}{\overline{T}} \Rightarrow 100 = \frac{2T_\delta}{\overline{T}} \Rightarrow 50\overline{T} = T_\delta \Rightarrow 50\frac{1}{\overline{f}} = \frac{1}{f_\delta} \Rightarrow 50 f_\delta = \overline{f} \Rightarrow$

$$50 f_\delta = \frac{f_1 + f_2}{2} \Rightarrow f_1 + f_2 = 100 f_\delta \Rightarrow f_1 + f_2 = 100 \cdot 4Hz \Rightarrow f_1 + f_2 = 400Hz \ (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει $\boxed{f_1 = 202Hz\,,\, f_2 = 198Hz}$

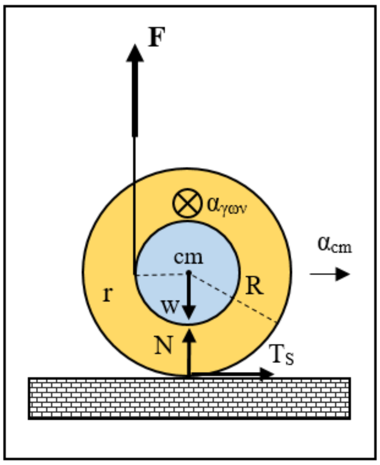
Β2. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι μειωμένη κατά 20% της αρχικής κινητικής του ενέργειας άρα $K_{\tau\varepsilon\lambda} = 80\% K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = 0{,}8 K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = 0{,}8 \cdot (K + K) \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = 0{,}8 \cdot 2 \cdot K \Rightarrow$

$$\frac{p_\kappa^2}{2m_{o\lambda}} = 1{,}6\frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{p_\kappa^2}{2\cdot 2m} = 1{,}6\frac{p^2}{2m} \Rightarrow p_\kappa^2 = 3{,}2p^2 \Rightarrow p^2 + p^2 + 2p\cdot p\cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 3{,}2p^2 \Rightarrow$$

$$2p^2 + 2p^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 3{,}2p^2 \Rightarrow 2p^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 1{,}2p^2 \Rightarrow \boxed{\sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}6}$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (α).



Ισχύει $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F + N = w \Rightarrow N = w - F \ (1)$

ΘΝΜ: $\Sigma F_x = m a_{cm} \Rightarrow T_S = m a_{cm} \ (2)$

ΘΝΣ: $\Sigma\tau = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_F - \tau_{T_S} = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$$Fr - T_S R = \frac{1}{2} m R^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F\frac{R}{2} - T_S R = \frac{1}{2} m R^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\frac{F}{2} - T_S = \frac{1}{2} m R a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \frac{F}{2} - T_S = \frac{1}{2} m a_{cm} \xrightarrow{(2)}$$

$$\frac{F}{2} - T_S = \frac{1}{2} T_S \Rightarrow \frac{F}{2} = \frac{3}{2} T_S \Rightarrow T_S = \frac{F}{3} \ (3)$$

Για να εκτελεί το στερεό κύλιση χωρίς ολίσθηση στο οριζόντιο δάπεδο θα πρέπει $T_S \le T_{S\max}$ όπου $T_{S\max} = \mu_S N \xrightarrow{(1)}$

$$T_{S\max} = \mu_S (w - F) \Rightarrow T_{S\max} = \frac{1}{3}(w - F)$$

Άρα $T_S \le T_{S\max} \Rightarrow \frac{F}{3} \le \frac{1}{3}(w - F) \Rightarrow F \le w - F \Rightarrow 2F \le w \Rightarrow \boxed{F \le \frac{w}{2}}$

Θέμα Γ

Γ1. Το σύστημα ελατήριο – σώματα από την ακραία θέση στα αριστερά μέχρι τη ΘΦΜ εκτελεί ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D=k$ και πλάτος $A=\Delta l$. Για το σώμα Σ2 η δύναμη επαφής που δέχεται από το σώμα Σ1 είναι η δύναμη επαναφοράς, οπότε το μέτρο της υπολογίζεται από τον τύπο:

$$F=m_2|a|=m_2\cdot\omega^2|x|=m_2\cdot\frac{k}{m_1+m_2}|\Delta l_1|=3\cdot\frac{400}{1+3}0,2N\Rightarrow\boxed{F=60N}$$

Γ2. Το σώμα Σ2 χάνει την επαφή του από το σώμα Σ1 στη θέση ισορροπίας ΘΙ - ΘΦΜ όπου η δύναμη επαφής – επαναφοράς μηδενίζεται: $|x|=0\rightarrow F=m_2|a|=m_2\cdot\omega^2|x|\Rightarrow F=0$. Στη ΘΙ – ΘΦΜ τα σώμα έχουν αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_{max}=\omega A=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}\cdot\Delta l\Rightarrow\upsilon_{max}=4\frac{m}{s}$

Γ3. Μόλις το σώμα Σ2 αποχωριστεί από το σώμα Σ1 το τελευταίο εκτελεί νέα απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A_1 έχοντας στη ΘΙ ταχύτητα $\upsilon_{1max}=\upsilon_{max}=4\frac{m}{s}$ για την οποία ισχύει:

$$\upsilon_{1max}=\omega_1 A_1\Rightarrow\upsilon_{1max}=\sqrt{\frac{k}{m_1}}A_1\Rightarrow 4=\sqrt{\frac{400}{1}}A_1\Rightarrow\boxed{A_1=0,2m}$$

Γ4. Μόλις το σώμα Σ2 αποχωριστεί από το σώμα Σ1 κινείται πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_2=\upsilon_{max}=4\frac{m}{s}$. Μετά την κρούση του με το σώμα Σ3, το σώμα Σ2 αποκτά μέτρο ταχύτητας ίσο με το μισό του μέτρου της ταχύτητας που είχε πριν την κρούση κινούμενο προς την αντίθετη κατεύθυνση. Ισχύει: $\upsilon_2'=\frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\upsilon_2$ με $\vec{\upsilon}_2'\uparrow\downarrow\vec{\upsilon}_2$ οπότε

$$-\frac{\upsilon_2}{2}=\frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\upsilon_2\Rightarrow-\frac{1}{2}=\frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\Rightarrow-m_2-m_3=2m_2-2m_3\Rightarrow\boxed{m_3=3m_2=9Kg}$$

Γ5. Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος Σ1 είναι: $T_1=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{400}}s\Rightarrow T_1=\frac{\pi}{10}s$.

Το σώμα Σ2 θα συγκρουστεί ξανά με το σώμα Σ1 τη στιγμή που αυτό έχει μέγιστη κινητική ενέργεια για δέκατη φορά μετά τον αποχωρισμό τους, άρα κινείται συνολικά για χρόνο $t=5T_1=5\frac{\pi}{10}s\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}s$. Κινείται προς τα δεξιά για χρόνο t_1 και ισχύει $d=\upsilon_2 t_1\Rightarrow t_1=\frac{d}{\upsilon_2}(1)$ και προς τα αριστερά για χρόνο t_2 και ισχύει $d=|\upsilon_2'|t_2=\frac{\upsilon_2}{2}t_2\Rightarrow 2d=\upsilon_2 t_2\Rightarrow t_2=\frac{2d}{\upsilon_2}(2)$. Για τον συνολικό χρόνο ισχύει $t=t_1+t_2$. Με αντικατάσταση των σχέσεων $(1),(2)$ έχουμε:

$$t=t_1+t_2\Rightarrow t=\frac{d}{\upsilon_2}+\frac{2d}{\upsilon_2}\Rightarrow t=\frac{3d}{\upsilon_2}\Rightarrow d=\frac{\upsilon_2\cdot t}{3}\Rightarrow\boxed{d=\frac{2\pi}{3}m}$$

Θέμα Δ

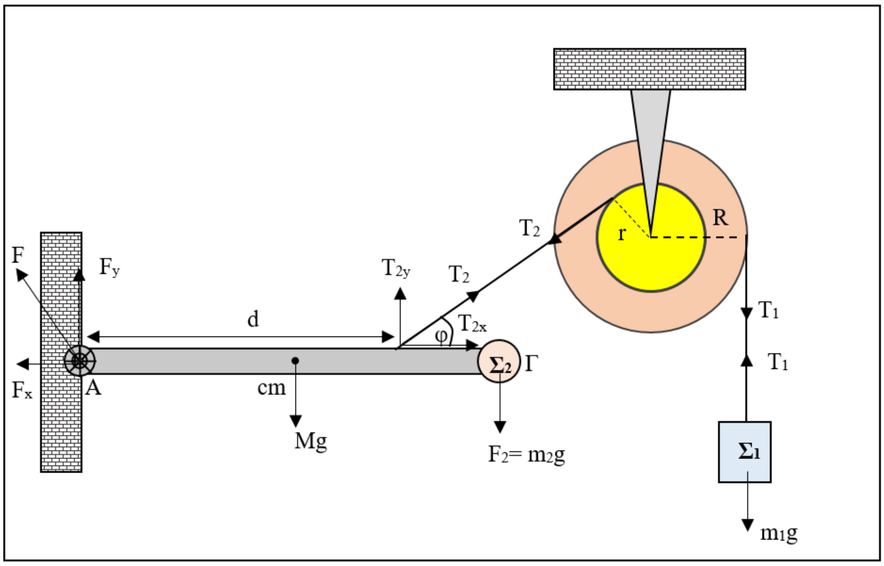
Δ1. Στο σώμα Σ1 ασκούνται το βάρος του και η τάση του νήματος και ισχύει:

$$\Sigma F_{1y}=0\Rightarrow T_1=m_1 g=12N$$

Στην τροχαλία ασκούνται οι δύο τάσεις και ισχύει:

$$\Sigma\tau_{τροχ}=0\Rightarrow\tau_{T_1}=\tau_{T_2}\Rightarrow T_1R=T_2r\Rightarrow 12\cdot 0,5=0,2T_2\Rightarrow T_2=30N$$

Στη δοκό ασκούνται το βάρος της, η τάση του νήματος, η δύναμη της άρθρωσης και μια δύναμη $\vec{F}_2$ από το σώμα Σ2 ίση με το βάρος του $(F_2=m_2g=5N)$ και ισχύει:



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_{2x} \Rightarrow$

$F_x = T_{2x} = T_2 \sigma\upsilon\nu\varphi = 15\sqrt{3}\text{N}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$F_y + T_{2y} = Mg + F_2 \Rightarrow$

$F_y = Mg + F_2 - T_2 \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow$

$F_y = (15+5-15)N \Rightarrow$

$F_y = 5N$

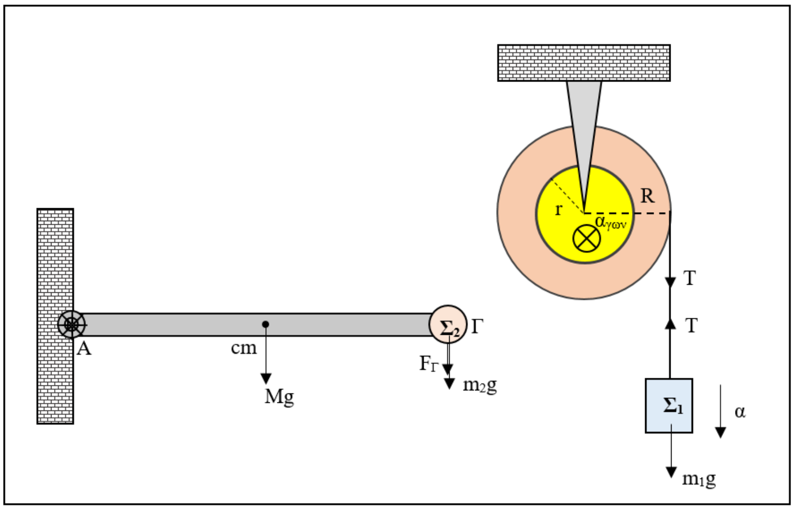
α) Για το μέτρο της δύναμης που δέχεται η δοκός από την άρθρωση ισχύει:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{675+25}N \Rightarrow \boxed{F = \sqrt{700}N = 10\sqrt{7}N}$$

β) Για τη ράβδο ισχύει επίσης: $\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow \tau_{T_{2y}} - \tau_{Mg} - \tau_{F_2} = 0 \Rightarrow T_{2y}\cdot d - Mg\cdot\frac{1}{2} - F_2\cdot 1 = 0 \Rightarrow$

$$T_2\cdot\eta\mu\varphi\cdot d = Mg\cdot\frac{1}{2} + F_2\cdot 1 \Rightarrow 15d = 15+10 \Rightarrow \boxed{d = \frac{5}{3}m}$$

Δ2. Για την κίνηση του συστήματος τροχαλία – σώμα Σ_1 ισχύει:



Για σώμα Σ_1 ΘΝΜ $\Sigma F_1 = m_1 a \Rightarrow$

$m_1 g - T = m_1 a \ (1)$

Για τροχαλία ΘΝΣ $\Sigma\tau = I_{\tau\rho o\chi} a_{\gamma\omega\nu}$

όπου $a = R a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a}{R}$

$\Rightarrow T\cdot R = I_{\tau\rho o\chi}\frac{a}{R}$

$\Rightarrow T = I_{\tau\rho o\chi}\frac{a}{R^2} \ (2)$

Από $(1)+(2) \Rightarrow m_1 g - T + T = m_1 a + I_{\tau\rho o\chi}\frac{a}{R^2} \Rightarrow m_1 g = \left(m_1 + \frac{I_{\tau\rho o\chi}}{R^2}\right)a \Rightarrow a = 3\frac{m}{s^2}$

και $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a}{R} = 6\frac{rad}{s^2}$. Άρα ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της διπλής τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι: $\frac{dL_{\tau\rho o\chi}}{dt} = \Sigma\tau_{\tau\rho o\chi} = I_{\tau\rho o\chi} a_{\gamma\omega\nu} = 0,7\cdot 6Nm \Rightarrow \boxed{\frac{dL_{\tau\rho o\chi}}{dt} = 4,2Nm \otimes}$

Δ3. Εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ για το σύστημα τροχαλία – σώμα Σ1 έχουμε:

$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ} \Rightarrow K_{ολ,αρχ} + U_{ολ,αρχ} = K_{ολ,τελ} + U_{ολ,τελ} \Rightarrow$$

$$\cancelto{0}{K_{ολ,αρχ}} + \cancel{U_{τροχ,αρχ}} + U_{Σ_1,αρχ} = K_{ολ,τελ} + \cancel{U_{τροχ,τελ}} + \cancelto{0}{U_{Σ_1,τελ}} \Rightarrow$$

$$K_{ολ,τελ} = U_{Σ_1,αρχ} = m_1 gh \Rightarrow \boxed{K_{ολ,τελ} = 12J}$$

Δ4. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος – σώμα Σ2 ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από την άρθρωση είναι: $I_{ολ(Α)} = I_{ραβ(Α)} + I_{Σ_1} = \left[I_{cm} + M\frac{l^2}{4}\right] + I_{Σ_1} \Rightarrow$

$$I_{ολ(Α)} = \left[\frac{1}{12}Ml^2 + M\frac{l^2}{4}\right] + I_{Σ_1} = \frac{1}{3}Ml^2 + m_1 l^2 \Rightarrow I_{ολ(Α)} = 4Kg \cdot m^2$$

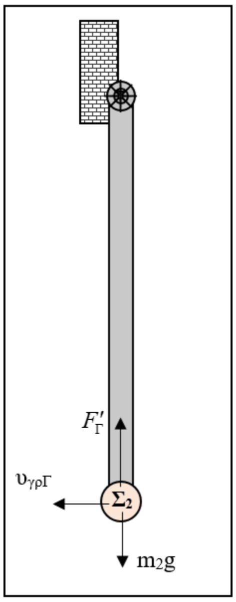
i) Η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος ράβδος – σώμα Σ2 στην οριζόντια θέση μόλις κοπεί το νήμα υπολογίζεται από τον ΘΝΣ: $\Sigma\tau_{Α} = I_{ολ,Α}a'_{γων} \Rightarrow a'_{γων} = \frac{\Sigma\tau_{Α}}{I_{ολ,Α}} = \frac{Mg\frac{l}{2} + m_1 gl}{I_{ολ,Α}} \Rightarrow a'_{γων} = \frac{25}{4}\frac{rad}{s^2}$

Η επιτρόχια επιτάχυνση του άκρου Γ άρα και του σώματος Σ2 θα είναι: $a_{ε,Γ} = l a'_{γων} = 12,5\frac{m}{s^2}$.

Από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα για το σώμα στην οριζόντια θέση έχουμε:

$$\Sigma F_{2y} = m_2 a_{ε,Γ} \Rightarrow F_Γ + m_2 g = m_2 a_{ε,Γ} \Rightarrow F_Γ = m_2\left(a_{ε,Γ} - g\right) \Rightarrow \boxed{F_Γ = 1,25N}$$

ii) Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος – σώμα Σ2 στην κατακόρυφη θέση υπολογίζεται από την ΑΔΜΕ:



$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ} \Rightarrow K_{ολ,αρχ} + U_{ολ,αρχ} = K_{ολ,τελ} + U_{ολ,τελ} \Rightarrow$$

$$\cancelto{0}{K_{ολ,αρχ}} + \cancelto{0}{U_{ραβ,αρχ}} + \cancelto{0}{U_{Σ_2,αρχ}} = \frac{1}{2}I_{ολ(Α)}\omega^2 - Mg\frac{l}{2} - m_2 gl \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{ολ(Α)}\omega^2 = Mg\frac{l}{2} + m_2 gl \Rightarrow$$

Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ2 από τη ράβδο τη στιγμή που διέρχεται από την κατακόρυφη θέση θα υπολογιστεί από την κεντρομόλο δύναμη ως εξής:

$$\Sigma F_{(R)} = m_2 a_κ \Rightarrow F'_Γ - m_2 g = m_2\frac{\upsilon^2_{γρΓ}}{l} \Rightarrow$$

$$F'_Γ = m_2 g + m_2 l\,\omega^2 = \left(5 + 12,5\right)N \Rightarrow \boxed{F'_Γ = 17,5N}$$