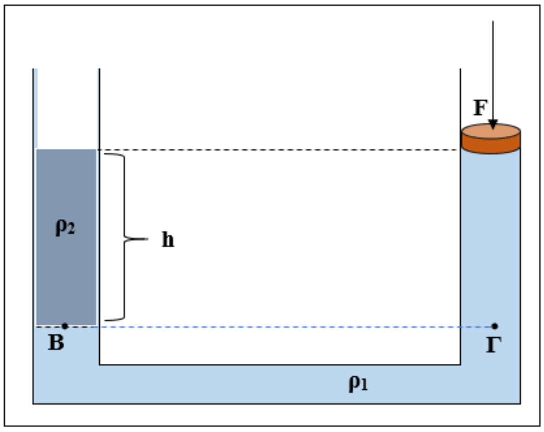
Θέμα Α

Α1 – α , Α2 – δ , Α3 – β , Α4 – δ , Α5 α – Σ, β – Σ , γ – Σ , δ – Λ , ε – Σ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Τα σημεία Β και Γ βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο στο ίδιο υγρό. Για τις πιέσεις τους ισχύει:



$$p_{B} = p_{\Gamma} \Rightarrow p_{atm} + \rho_2 gh = p_{\varepsilon\mu\beta\acute{o}\lambda o\upsilon} + \rho_1 gh \Rightarrow$$

$$p_{atm} + \rho_2 gh = p_{atm} + \frac{F}{A} + \rho_1 gh \Rightarrow$$

$$1,2\rho_1 gh = \frac{F}{A} + \rho_1 gh \Rightarrow \frac{F}{A} = 0,2\rho_1 gh \Rightarrow$$

$$\boxed{F = 0,2\rho_1 ghA = \frac{\rho_1 ghA}{5}}$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η ισχύς του ρευστού υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta t}\upsilon^2 \Rightarrow P = \frac{1}{2}\rho \cdot \Pi \upsilon^2$$

Στη διατομή A_1 η ισχύς του ρευστού είναι : $P_1 = \frac{1}{2}\rho \cdot \Pi \upsilon_1^2$

Στη διατομή A_2 η ισχύς του ρευστού είναι : $P_2 = \frac{1}{2}\rho \cdot \Pi \upsilon_2^2$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις έχουμε: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2}$

Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε: $\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow 4A_2\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = 4\upsilon_1$

άρα $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\upsilon_1^2}{16\upsilon_1^2} \Rightarrow \boxed{P_2 = 16P_1}$

Β3. i) Σωστή απάντηση είναι η (α).

Όταν το υλικό σημείο στη αρχή Ο έχει για έκτη φορά δυναμική μέγιστη ενέργεια ταλαντώνεται για χρόνο $t_1 = 2T + \frac{3T}{4} = \frac{11T}{4}$ και το κύμα έχει φτάσει στη θέση $x_1 = \upsilon t_1 = \frac{\lambda}{T}\frac{11T}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{11\lambda}{4}$

Τα σημεία του μέσου που έχουν μέγιστη θετική απομάκρυνση θα τα βρούμε από τη λύση της τριγωνομετρικής: $y = +A \Rightarrow A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t_1}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = +A \Rightarrow \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{11T}{4} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = +1 \Rightarrow$

$$\eta\mu\left(\frac{11\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{11\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{5-2\kappa}{2}\lambda$$

Όμως $0 \le x \le \frac{11\lambda}{4} \Rightarrow 0 \le \frac{5-2\kappa}{2}\lambda \le \frac{11\lambda}{4} \Rightarrow 0 \le 5 - 2\kappa \le 5,5 \Rightarrow -5 \le -2\kappa \le 0,5 \Rightarrow$

$-0,25 \le \kappa \le 2,5$ άρα $\kappa = 0 \to x = \frac{5\lambda}{2}$, $\kappa = 1 \to x = \frac{3\lambda}{2}$, $\kappa = 2 \to x = \frac{\lambda}{2}$ τρία σημεία.

ii) Σωστή απάντηση είναι η (β).

Λύνοντας την τριγωνομετρική $y = +\frac{A}{2}$ τη χρονική στιγμή $t_2 = 2T$ έχουμε:

$$y=+\frac{A}{2}\Rightarrow A\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi t_2}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}\right)=+\frac{A}{2}\Rightarrow\eta\mu\left(\frac{2\pi\cdot 2T}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}\right)=+\frac{1}{2}\Rightarrow\eta\mu\left(4\pi-\frac{2\pi x}{\lambda}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases}4\pi-\dfrac{2\pi x}{\lambda}=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow x=\dfrac{23-12\kappa}{12}\lambda\ ,\ v>0\quad(1)\\[2ex]4\pi-\dfrac{2\pi x}{\lambda}=2\kappa\pi+\pi-\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow x=\dfrac{19-12\kappa}{12}\lambda\ ,\ v<0\quad(2)\end{cases}$$

από (1) $\kappa=0\rightarrow x=\frac{23\lambda}{12}$, $\kappa=1\rightarrow x=\frac{11\lambda}{12}$, $\kappa=2\rightarrow x<0$

από (2) $\kappa=0\rightarrow x=\frac{19\lambda}{12}$, $\kappa=1\rightarrow x=\frac{7\lambda}{12}$, $\kappa=2\rightarrow x<0$

Άρα η ελάχιστη απόσταση δύο διαδοχικών σημείων που έχουν απομάκρυνση $y=+\frac{A}{2}$ τη χρονική στιγμή $t_2=2T$ είναι $\Delta x=\frac{23\lambda}{12}-\frac{19\lambda}{12}\Rightarrow\Delta x=\frac{\lambda}{3}$.

Θέμα Γ

Γ1. Για τα δύο σημεία ισχύει:

$$\Delta\Phi=\Phi_1-\Phi_2=\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x_1}{\lambda}-\frac{2\pi t}{T}+\frac{2\pi x_2}{\lambda}\Rightarrow\Delta\Phi=\frac{2\pi\cdot\Delta x}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{2\pi\cdot\Delta x}{\Delta\Phi}=\frac{2\pi\cdot 20}{4\pi}cm\Rightarrow\lambda=10cm$$

Η ταχύτητα διάδοσης είναι: $\upsilon=\lambda f\Rightarrow\boxed{\upsilon=100\frac{cm}{s}=1\frac{m}{s}}$

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση είναι: $y=A\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}+\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\Rightarrow\boxed{y=0{,}1\cdot\eta\mu(20\pi t+20\pi x)\,S.I.}$

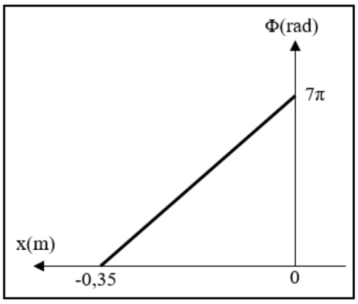
Γ2. Το σημείο Μ στη θέση $x_M=-35cm=-0{,}35m$ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή που φτάνει το κύμα, δηλαδή: $|x_M|=\upsilon\cdot t_1\Rightarrow t_1=\frac{|x_M|}{\upsilon}\Rightarrow\boxed{t_1=0{,}35s}$

Γ3. Η φάση του κύματος είναι: $\Phi=20\pi t+20\pi x,\ S.I.$

Τη χρονική στιγμή t_1 η φάση των σημείων του αρνητικού ημιάξονα περιγράφεται από την εξίσωση:

$\Phi=20\pi t_1+20\pi x\Rightarrow\Phi=7\pi+20\pi x,\ S.I.$ με $-0{,}35m\le x\le 0$

Έχουμε: $x=0\rightarrow\Phi=7\pi\,rad,\ x=x_M\rightarrow\Phi=0$



Γ4. Η απόσταση των δύο σημείων είναι: $\Delta x=x_M-x_\Sigma=-35cm-10cm=-45cm\rightarrow|\Delta x|=45cm$.

Η διαφορά φάσης των δύο σημείων είναι: $\Delta\Phi=\frac{2\pi\cdot|\Delta x|}{\lambda}=\frac{2\pi\cdot 45}{10}\Rightarrow\Delta\Phi=9\pi\,rad$

Για τη φάση του σημείου Μ έχουμε:

$v_M=-v_{max}\Rightarrow v_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\Phi_M=-v_{max}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\Phi_M=-1\Rightarrow\Phi_M=2\kappa\pi+\pi$, άρα η φάση του σημείου Σ είναι: $\Delta\Phi=9\pi\,rad\Rightarrow\Phi_\Sigma-\Phi_M=9\pi\,rad\Rightarrow\Phi_\Sigma=\Phi_M+9\pi=2\kappa\pi+\pi+9\pi\Rightarrow\Phi_\Sigma=2\kappa\pi+10\pi$

Οπότε η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Σ θα είναι:

$$v_\Sigma=v_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\Phi_\Sigma=v_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi+10\pi)\Rightarrow v_\Sigma=+v_{max}=+\omega A\Rightarrow\boxed{v_\Sigma=+2\pi\frac{m}{s}}$$

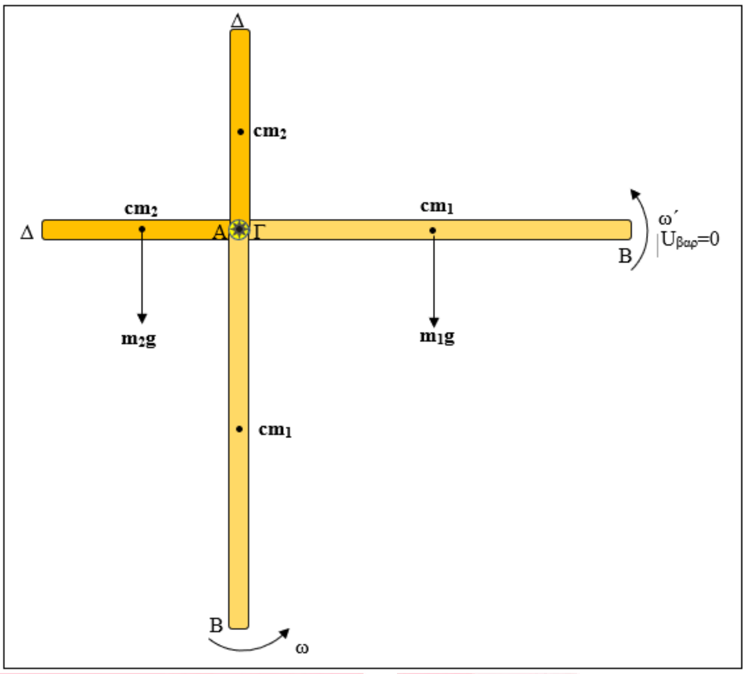
Θέμα Δ

Δ1. Η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι:

$$I_{o\lambda} = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}m_1\ell_1^2 + \frac{1}{3}m_2\ell_2^2 \Rightarrow I_{o\lambda} = \frac{3}{4}Kg\cdot m^2$$

Εφαρμόζουμε ΑΔΣ για την κρούση του σφαιριδίου και του συστήματος των δύο ράβδων, ως προς τον άξονα περιστροφής των ράβδων: $\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow L_m = L_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \Rightarrow m\upsilon\ell_1 = I_{o\lambda}\omega \Rightarrow \boxed{\omega = 6\frac{rad}{s}}$

Δ2. Εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ για το σύστημα έχουμε:



$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$K_{o\lambda,\alpha\rho\chi} + U_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} + U_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega^2 - m_1 g\frac{\ell_1}{2} + m_2 g\frac{\ell_2}{2} =$$

$$\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega'^2 + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{\omega' = 4\frac{rad}{s}}$$

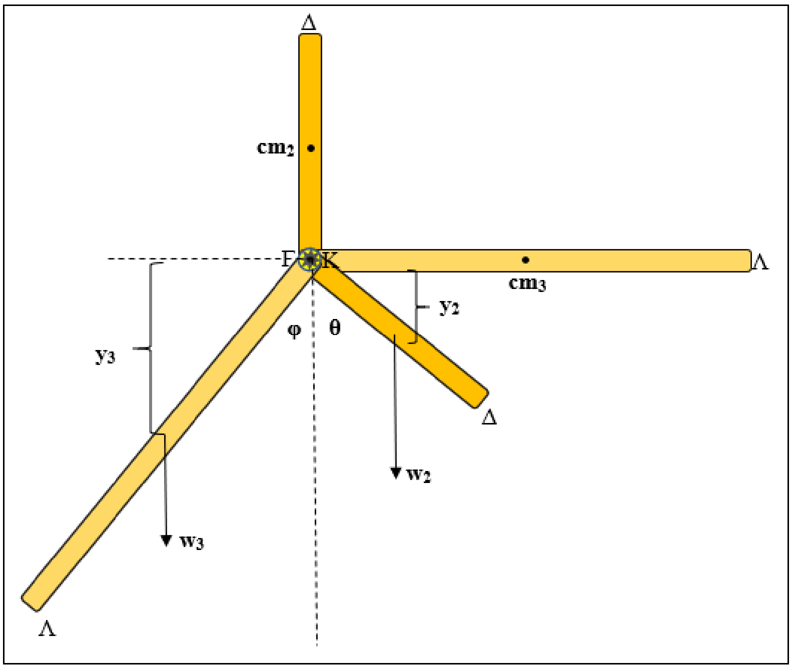
Δ3. Ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} = -\frac{\Sigma\tau\cdot d\theta}{dt} = -\Sigma\tau\cdot\omega' \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -\left(m_1 g\frac{\ell_1}{2} - m_2 g\frac{\ell_2}{2}\right)\cdot\omega' \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dK}{dt} = -30\frac{J}{s}}$$

Δ4. Μέγιστη κινητική ενέργεια αποκτά το σύστημα τη στιγμή που μηδενίζεται η συνολική ροπή, δηλαδή:



$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow \tau_{m_3 g} - \tau_{m_2 g} = 0 \Rightarrow$$

$$m_3 g\frac{\ell_3}{2}\eta\mu\varphi = m_2 g\frac{\ell_2}{2}\eta\mu\theta \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi = \eta\mu\theta \Rightarrow \varphi = \theta = 45^{o}$$

Εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ για το σύστημα έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$K_{o\lambda,\alpha\rho\chi} + U_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} + U_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$K_{o\lambda,\alpha\rho\chi} + U_{\mathrm{K\Lambda},\alpha\rho\chi} + U_{\Gamma\Delta,\alpha\rho\chi} = K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} + U_{\mathrm{K\Lambda},\tau\varepsilon\lambda} + U_{\Gamma\Delta,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$0 + 0 + m_2 g\frac{\ell_2}{2} = K_{o\lambda,\max} - m_3 g\cdot y_3 - m_2 g\cdot y_2 \Rightarrow$$

όπου $y_3 = \frac{\ell_3}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\ell_3}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ell_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}m$ και $y_2 = \frac{\ell_2}{2}\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\ell_2}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ell_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}m$

$$K_{o\lambda,\max} = m_2 g\frac{\ell_2}{2} + m_3 g\cdot y_3 + m_2 g\cdot y_2 = 2{,}5J + 5\frac{\sqrt{2}}{4}J + 10\frac{\sqrt{2}}{8}J = 2{,}5J + 2{,}5\sqrt{2}J \Rightarrow$$

$$K_{o\lambda,\max} = 2{,}5\left(1+1{,}4\right)J \Rightarrow \boxed{K_{o\lambda,\max} = 6J}$$