1. ✉ **Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1**
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ **Φανερωμένης 13**
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

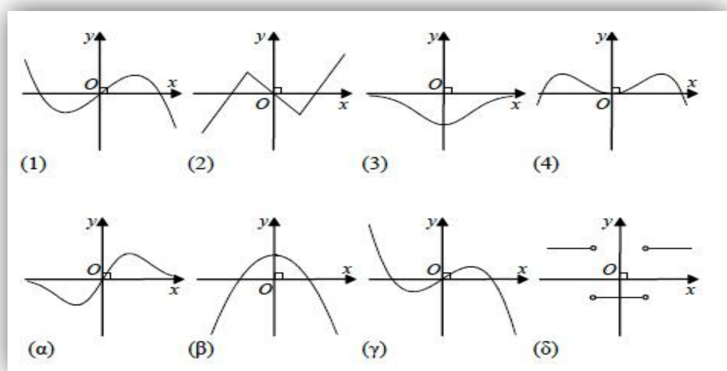
ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 28 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2018

Θέμα Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Α2. Στην πρώτη γραμμή του παρακάτω πίνακα υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις μερικών συναρτήσεων και στη δεύτερη γραμμή οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση στην παράγωγό της.



Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

<< Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ >>

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α αν είναι αληθής , ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής. (μονάδες 1)

β) Να αιτιολογήστε την απάντηση σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού R και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof , τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες .

β) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις : $f:A\to R$ και $g:B\to R$, αν ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ τότε έχει πεδίο ορισμού την τομή $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$.

γ) Μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to R$ είναι $1-1$, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

δ) Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό. Τότε ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

ε) Για κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx=0$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Μονάδες : 7 – 4 - 4 – 10

Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{2e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής το $A(0,f(0))$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση x_1 , με $x_1\in(1,2)$.

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να την σχεδιάσατε .

Β4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από Cf , $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

Μονάδες : 8 – 4 - 8 – 5

Θέμα Γ

Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}\frac{x\cdot lnx}{1-x} & , \ 0<x<1\\ -\frac{1}{2}\cdot e^{\alpha x-1}+\beta & , \ x\geq 1\end{cases}$

η όποια είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-\frac{1}{2}$

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

Γ3. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$, τότε να λύσετε την ανίσωση :

$$F(x)+f(x)>F(1)-1\,, \qquad x>0\,.$$

Γ4. Με την βοήθεια της ανισότητας $lnx \leq x-1$, $x>0$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx < -\frac{3}{32}.$$

Μονάδες : 8 – 7 - 5 – 5

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν :

- $g(2018)=0,$
- $|g(x)-g(y)| \leq (x-y)^2$, για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$,
- $\left(\int_0^1 f(t)dt+1\right)^x \geq x+1\,,\ x\in\mathbb{R}\,,$
- Η συνάρτηση $G(x)=f(x)e^{-x}, x\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της g στο $\mathbb{R}$.

Δ1. α) Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή . (μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$. (μονάδες 5)

Δ2. Να βρείτε το όριο $lim_{x\to 0^-}\left(f\left(\frac{1}{x}\right)ln|x|\right)$.

Δ3. Αν (ε) : $y=ex$ η εφαπτόμενη της Cf ,τότε να σχεδιάσατε τις (ε) και Cf , και να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0\in(-1,0)$, για το οποίο το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ε) , τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=x_0$ να ισούται με $\frac{e-2}{2}+ln(x_0+1)$.

Δ4. Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του $\lambda>0$ για την οποία ισχύει $f(x)\geq\lambda x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες : 9 – 4 - 7 – 5