ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓ. ΜΑΘ. Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

28 - 4 - 2018

ΘΕΜΑ Α

Α1 ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΔ.

Α2

1 → (β)

2 → (δ)

3 → (α)

4 → (γ)

Α3 α) Ψ β) Πχ $\int_{-1}^{2} x\,dx = \frac{3}{2} > 0$, όμως η $f(x) = x$

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ $f(x) > 0 \ \forall x \in [-1, 2]$

Α4

α) Λ

β) Λ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1 • $f'(x) = 1 - \dfrac{2e^x(e^x+1) - 2e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x} + \cancel{2e^x} + 1 - \cancel{2e^{2x}} - \cancel{2e^x} + \cancel{2e^{2x}}}{(e^x+1)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0$ άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$

• $f''(x) = \dots = \dfrac{2}{(e^x+1)^3} \cdot (e^x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

x		0	
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	ΣΚ	$\smile$

$f(0) = -1$

Β2 • $f(1) = 1 - \dfrac{2e}{e+1} = \dfrac{e+1-2e}{e+1} = \dfrac{1-e}{e+1} < 0$

• $f(2) = 2 - \dfrac{2e^2}{e^2+1} = \dfrac{\cancel{2e^2}+2-\cancel{2e^2}}{e^2+1} > 0$

Α $f(1)f(2) < 0$ κ' Θ. Bolzano ... κ' επειδή $f \uparrow$ είναι μοναδικό.

Β3 • $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \dfrac{2e^x}{x(e^x+1)}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{2e^x}{e^x+1}\right)$

$= 1 - 0 \cdot 0 = 1$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{2e^x}{e^x+1}\right) = 0$

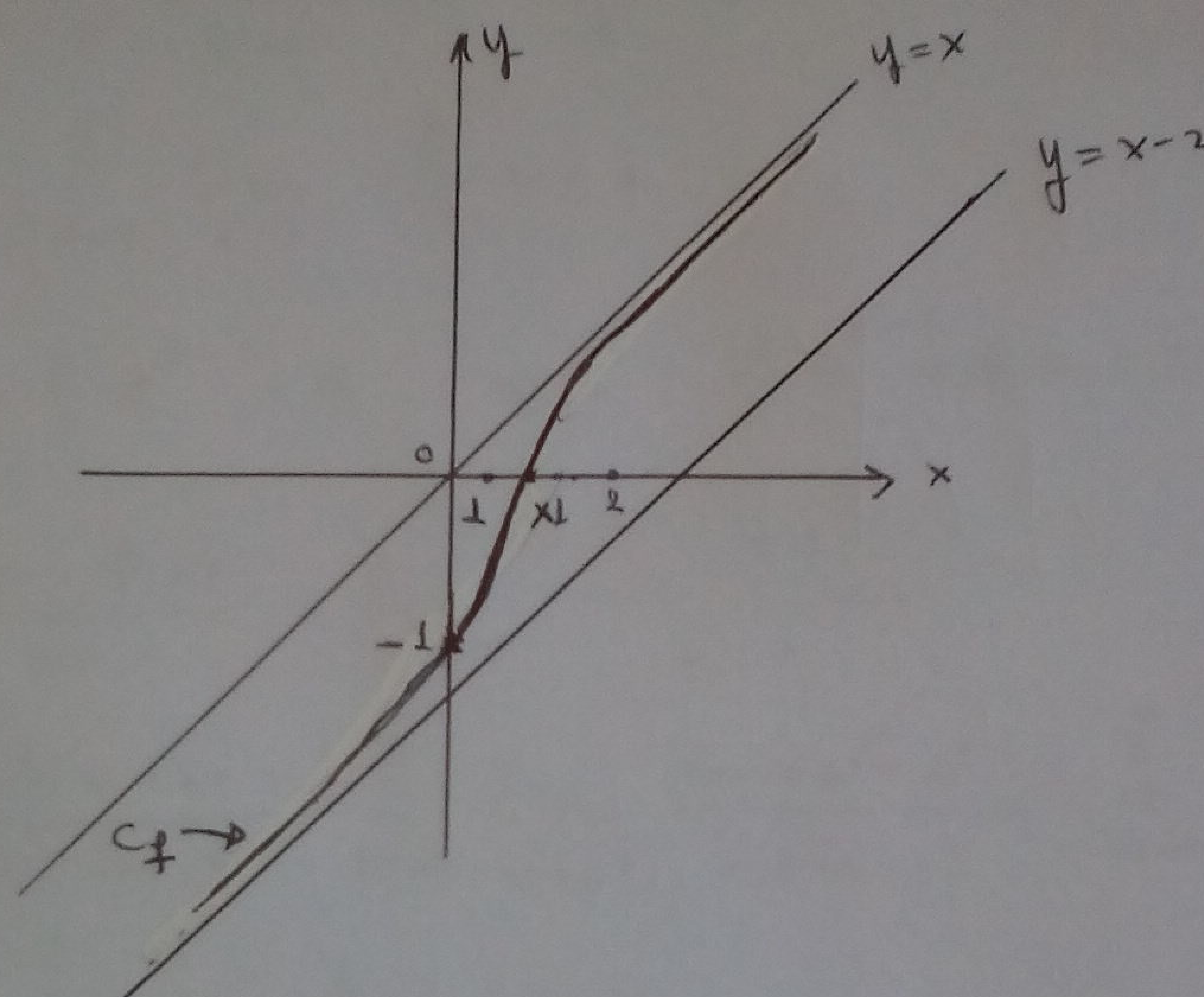
άρα $\boxed{y = x}$ ΑΣΥΜ. ΤΗΣ C_f στο $-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2e^x}{x(e^x+1)}\right) = 1 - 0 = 1$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2e^x}{e^x+1}\right)=-2$

Οπότε $\boxed{y=x-2}$ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ ΤΗΣ C_f ΣΤΟ $+\infty$



B4 $E(\Omega)=\displaystyle\int_0^1|f(x)|\,dx \overset{*}{=} \int_0^1 f(x)\,dx=-\int_0^1 f(x)\,dx$

$=\dots=\left[-\dfrac{x^2}{2}+2\ln(e^x+1)\right]_0^1$

$f\uparrow$

• $x<1 \Leftrightarrow f(x)<f(1)<0$ άρα $f(x)<0$

$=-\dfrac{1}{2}+2\ln(e+1)-2\ln 2$

τ.μ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 f παρ/μη στο $x_0 = 1$ άρα f συνεχής στο $x_0 = 1$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x \cdot \ln x}{1-x} = \lim\limits_{x \to 1^-} x \cdot \dfrac{\ln x}{1-x} \overset{*}{=} 1 \cdot (-1) = -1$

$* \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\ln x}{1-x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$

- $f(1) = -\frac{1}{2} e^{\alpha-1} + \beta$ άρα $-\frac{1}{2} e^{\alpha-1} + \beta = -1$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\frac{x \ln x}{1-x} + 1}{x-1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x \ln x + 1 - x}{-(x-1)^2} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\ln x + \cancel{1} - \cancel{1}}{-2(x-1)} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\frac{1}{x}}{-2} = -\dfrac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-\frac{1}{2} e^{\alpha x-1} + \beta + 1}{x-1} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-\frac{1}{2} \alpha e^{\alpha x-1}}{1} = -\frac{1}{2} \alpha e^{\alpha-1}$

Άρα $-\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \alpha e^{\alpha-1} = -\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha-1} = 1$

Αφού $e^{\alpha-1} > 0$ τότε $\alpha > 0$ άρα $\ln \alpha e^{\alpha-1} = \ln 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\alpha + \alpha - 1 = 0$

Θεωρώ $k(\alpha) = \ln\alpha + \alpha - 1 \ , \ \alpha > 0$

$k(1) = 0 + 1 - 1 = 0$

$k'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + 1 > 0$ άρα ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΡΙΖΑ $\boxed{\alpha = 1}$

Έχουμε $-\frac{1}{2} e^{\alpha - 1} + \beta = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \beta = -1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -\frac{1}{2}}$

Δ)

• Για $0 < x < 1$: $f'(x) = \frac{(1 + \ln x)(1 - x) + x\ln x}{(1 - x)^2}$

$= \frac{1 - x + \ln x - \cancel{x\ln x} + \cancel{x\ln x}}{(1 - x)^2} = \frac{\ln x - (x - 1)}{(1 - x)^2}$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου γνωρίζουμε ότι:

$\ln x \le x - 1$ άρα $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 1)$

• Για $x > 1$: $f'(x) = -\frac{1}{2} e^{x - 1} < 0$

Επειδή f συνεχής στο $(0, +\infty)$ τότε $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

οπότε $f \downarrow$ στο $(0, +\infty)$

• f συνεχής κ' $\downarrow$ στο $(0, +\infty) \rightarrow f(A) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to 0^+} f(x)\right)$

* $\lim_{x \to 0^+} \frac{x\ln x}{1 - x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 - x} \cdot (x\ln x) = 1 \cdot 0 = 0$

• $\lim_{x \to 0^+} x\ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

** $\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{x - 1} - \frac{1}{2}\right) = -\infty$ άρα $\boxed{f(A) = (-\infty, 0)}$

Γ3 Θεωρω $h(x) = F(x) + f(x)$

$$h(1) = F(1) + f(1) = F(1) - 1$$

$$h'(x) = f(x) + f'(x) \overset{*}{<} 0 \text{ αρα } h \downarrow$$

$*$ Απο το **Γ2** εχουμε $f'(x) < 0 \ \forall x > 0$

κ' $f(A) = (-\infty, 0)$ αρα $f(x) < 0 \ \forall x > 0$

$$\downarrow$$

$$h(x) > h(1) \Leftrightarrow x < 1$$

ΤΕΛΙΚΑ $\boxed{0 < x < 1}$

Γ4 Εχουμε $\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow -\ln x \geq 1 - x$

$$\overset{1-x>0}{\underset{x\in(0,1)}{\Longleftrightarrow}} -\frac{\ln x}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{1-x} \leq -1 \overset{\cdot x>0}{\Longleftrightarrow} \frac{x\ln x}{1-x} \leq -x$$

$*$ Επειδη το ισον στην ανισωση $\ln x \leq x - 1$ ισχυει

μονο οταν $x = 1$ τοτε $\dfrac{x\ln x}{1-x} < -x \Rightarrow$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1/2} \frac{x\ln x}{1-x}\,dx < \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} -x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{16}}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{1}{16} - \frac{4}{16}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{3}{16}}{2} = -\frac{3}{32}$$

Τελικα, $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx < -\frac{3}{32}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 (α) $y = x_0$: $|g(x)-g(x_0)| \le |x-x_0|^2$

$\overset{x\neq x_0}{\Longleftrightarrow} \dfrac{|g(x)-g(x_0)|}{|x-x_0|} \le |x-x_0| \Leftrightarrow \left|\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| \le |x-x_0|$

$\Leftrightarrow -|x-x_0| \le \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \le |x-x_0|$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0}(-|x-x_0|)=0 \\ \lim\limits_{x\to x_0}(|x-x_0|)=0 \end{array}\right\}$ άρα από Κ.Π. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=0$

Οπότε $g'(x_0)=0$ άρα $g(x)=c \in \mathbb{R}$ κ' επειδή

$g(2018)=0$ τότε $g(x)=0$

(β) • $G'(x)=g(x) \Leftrightarrow G'(x)=0 \Leftrightarrow G(x)=c_1$

Όμως $G(x)=f(x)e^{-x} \Leftrightarrow f(x)=c_2e^x$

• Είναι $\left(\int_0^1 f(t)\,dt+1\right)^x - x - 1 \ge 0$

Θέτω $k(x)=\left(\int_0^1 f(t)\,dt+1\right)^x - x - 1 = \alpha^x - x - 1$

$k'(x)=\alpha^x \ln\alpha - 1$

$k(0)=1-0-1=0$

Οπότε $k(x)\ge k(0)$ άρα Θ. Fermat $k'(0)=0$

$\Leftrightarrow \alpha^0\ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha=\ln e$

$\Leftrightarrow \alpha=e$

Άρα, $\int_0^1 f(t)\,dt + 1 = e \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = e-1$

Έχουμε $f(x) = c_1 e^x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 c_1 e^x\,dx$

$\Leftrightarrow e-1 = c\int_0^1 e^x\,dx \Leftrightarrow e-1 = c\left[e^x\right]_0^1$

$\Leftrightarrow e-1 = c(e-1) \Leftrightarrow c=1$ άρα $\underline{f(x)=e^x}$

<u>Δ2</u>

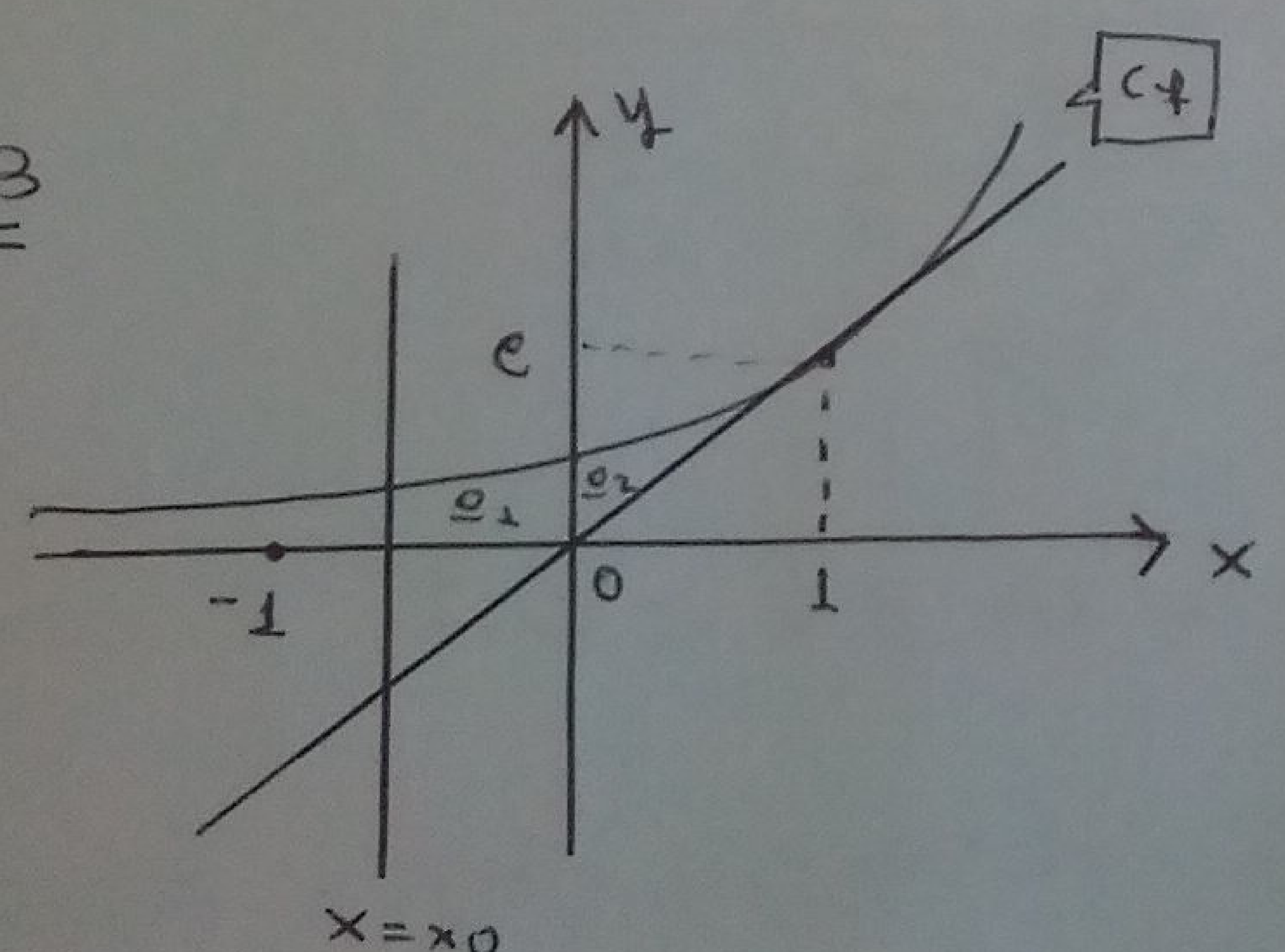
$$\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}\ln|x| \overset{*}{=} \lim_{u\to-\infty} e^u \ln\left|\frac{1}{u}\right| =$$

*Θέτουμε $u=\frac{1}{x}$ άρα $u\to-\infty$

$$= \lim_{u\to-\infty} e^u(\ln1-\ln|u|) = \lim_{u\to-\infty} -e^u\ln|u|$$

$$= \lim_{u\to-\infty} -\frac{\ln|u|}{e^{-u}} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{u\to-\infty}\frac{1}{ue^{-u}} \overset{\frac{1}{\infty}}{=} 0$$

<u>Δ3</u>



$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) =$

$$= \int_{x_0}^{0} f(x)\,dx + \int_0^1 (f(x)-y)\,dx$$

$$= \left[e^x\right]_{x_0}^{0} + \left[e^x - e\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 1-e^{x_0} + e - \frac{e}{2} - (1-0)$$

$$= 1-e^{x_0} + \frac{e}{2} - 1 = \frac{e}{2} - e^{x_0}$$

ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ αν $\frac{e}{2} - e^{x_0} = \frac{e-2}{2} + \ln(x_0+1)$, $x_0 \in (-1,0)$

ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΛΥΣΗ

$$\frac{e}{2} - e^{x_0} = \frac{e}{2} - 1 + \ln(x_0+1 \Leftrightarrow e^{x_0} - 1 + \ln(x_0+1) = 0$$

Θεωρω $\Lambda(x_0) = e^{x_0} - 1 + \ln(x_0+1)$, $x_0 \in (-1,0)$

$$\Lambda'(x_0) = e^{x_0} + \frac{1}{x_0+1} > 0 \text{ αρα } \Lambda \uparrow \text{ στο } (-1,0)$$

Λ συνεχης κ' $\uparrow$ στο $(-1,0)$ οποτε $\Lambda((-1,0)) = (-\infty, 0)$

Επειδη $0 \notin (-\infty, 0)$ τοτε ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ x_0

<u>Δ4</u> θεωρω $w(x) = e^x - \lambda x$, $x \in \mathbb{R}$ κ' $\lambda > 0$

- $w'(x) = e^x - \lambda$
- $w'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \lambda \Leftrightarrow x \geq \ln\lambda$

x		$\ln\lambda$	
w'	$-$	0	$+$
w	$\searrow$		$\nearrow$

ο.ε αρα

$$w_{min} = w(\ln\lambda) = e^{\ln\lambda} - \lambda \cdot \ln\lambda = \lambda - \lambda\ln\lambda$$

Ειναι: $f(x) \geq \lambda x \Leftrightarrow w(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Οποτε $w_{min} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda(1 - \ln\lambda) \geq 0 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} 1 - \ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$

$-\ln\lambda \geq -1 \Leftrightarrow \ln\lambda \leq 1 \Leftrightarrow \ln\lambda \leq \ln e \Leftrightarrow \lambda \leq e$

αρα $\boxed{\lambda = e}$