

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Για την συνάρτηση $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$ να αποδειχθεί ότι $f'(x) = a^x \cdot \ln a$, $x \in \mathbb{R}$ **(5μ)**

B) Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να γράψετε την γεωμετρική ερμηνεία . **(3+3μ)**

Γ) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

<< Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) ισχύει ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta) : f'(x_0) = 0$ τότε $f(\alpha) = f(\beta)$ >>

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α αν είναι αληθής , ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). **(1+3μ)**

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = 0$.

2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για $x = x_0$ τότε ισχύει $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$.

3. Κάθε συνεχής συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο.

4. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε το σύνολο τιμών της αντιστοιχεί σε διάστημα.

5. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ τότε δεν παρουσιάζει ρίζα στο (α, β) .

(10μ)

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει $(f(x) - \sqrt{x^2 + 16})^2 = x^2 + 16$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 8$ τότε:

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 16}$, $x \in \mathbb{R}$ **(7μ)**

2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f . **(6μ)**

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



3. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτόμενης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{6}{5}x + 8$ (6μ)

4. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$ παρουσιάζει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,2) (6μ)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+9} - \alpha & , x < 0 \\ (x-\beta) \cdot e^x + x^2 - 2 & , x \geq 0 \end{cases}$. Αν ισχύει το θεώρημα Rolle για την f

στο διάστημα $[-4, 1]$ τότε:

1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=6$ και $\beta=1$. (7μ)

2. Να βρεθεί η $f'(x)$ (6μ)

3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3f^2(x) + 4x^3 \eta\mu(1/x)}{x^2 f(x) + x^3 + 7x^2}$ αν είναι γνωστό ότι η ευθεία $y = -x - 6$ είναι

πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. (6μ)

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x = \ln(2-x^2) - \ln(x-1)$ παρουσιάζει ακριβώς μία ρίζα στο $(1, \sqrt{2})$ (6μ)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

- $x^2 \cdot f(x) = g(x), x \in \mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη με $g(0) = 0, g'(0) = 0$ και $g''(0) = 2$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x^2} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$. (7μ)



1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



2. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $k(x) = x - (x+1) \cdot \ln(x+1)$, $x \geq 0$ έχει σύνολο τιμών $K(A) = (-\infty, 0]$ (7μ)

3. Αν επιπλέον δίνεται ότι $g(x) = \ln(x^2+1)$ τότε:

α) Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία. (6μ)

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha < \beta$ θα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$:

$$(x_0^2 + 1)^{2\alpha \cdot \beta^2} = (\alpha^2 + 1)^{\beta^2 \cdot x_0^2} \cdot (\beta^2 + 1)^{\alpha^2 \cdot x_0^2} \quad (5\mu)$$



En Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

...ΕΥΧΟΜΕΘΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑ...

