Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

ΘΕΜΑ 1ο

Γ) α) ΨΕΥΔΗΣ

β) πχ $f(x)=x^3$, $f'(0)=0$

Αφού η f ↑ δεν υπάρχει διάστημα $[\alpha,\beta]$
με $f(\alpha)=f(\beta)$

Δ) 1. ΛΑΘΟΣ 3. ΛΑΘΟΣ 5. ΛΑΘΟΣ
2. ΛΑΘΟΣ 4. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

1. $(f(x)-\sqrt{x^2+16})^2 = x^2+16 \Leftrightarrow |f(x)-\sqrt{x^2+16}| = \sqrt{x^2+16}$ (1)

Έστω $g(x)=f(x)-\sqrt{x^2+16}$, η $g(x)$ συνεχής ως πράξεις συνεχών.
Έστω $g(x)=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 0=\sqrt{x^2+16}$ Αδύνατο. Οπότε $g(x)\neq 0$ και συνεχής
άρα έχει σταθερό πρόσημο.

(7 ΜΟΝΑΔΕΣ)

$g(0)=f(0)-\sqrt{16} = 8-4=4>0$ Άρα η $g(x)>0$

$(1) \Rightarrow |g(x)| = \sqrt{x^2+16} \overset{g(x)>0}{\Longleftrightarrow} g(x)=\sqrt{x^2+16} \Leftrightarrow f(x)-\sqrt{x^2+16}=\sqrt{x^2+16}$
$\Leftrightarrow f(x)=2\sqrt{x^2+16}$, $x\in\mathbb{R}$.

2. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

Στο $+\infty$:

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2+16}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2|x|\sqrt{1+16/x^2}}{x}$ $\frac{x\to+\infty}{x>0}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{1+16/x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}2\sqrt{1+16/x^2} = 2 = \lambda.$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2\sqrt{x^2+16}-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}2\,\frac{x^2+16-x^2}{\sqrt{x^2+16}+x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}2\,\frac{16}{\sqrt{x^2+16}+x} = 0 = \beta$ οπότε η $\boxed{y=2x}$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Παρατηρήσεις

Στο $-\infty$:

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2\cancel{x}\sqrt{1+16/x^2}}{\cancel{x}}=-2=\lambda$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

- $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2\sqrt{x^2+16}+2x\right)=$

$=\lim_{x\to-\infty}2\frac{16}{\sqrt{x^2+16}-x}=0=\beta$

οπότε η $\boxed{y=-2x}$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

3. Αρκεί να $x_0\in A_f$: $f'(x_0)=\frac{6}{5}$ $\left(\lambda_{\varepsilon\varphi}=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{6}{5}\right)$

$\Leftrightarrow 2\cdot\frac{\cancel{2}x_0}{\cancel{2}\sqrt{x_0^2+16}}=\frac{6}{5} \Leftrightarrow 5\cdot 2x_0=6\sqrt{x_0^2+16} \Leftrightarrow$

$5x_0=3\sqrt{x_0^2+16}$ άρα $\boxed{x_0>0}$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Τότε $25x_0^2=9x_0^2+9\cdot16 \Leftrightarrow \cancel{16}x_0^2=9\cdot\cancel{16} \Leftrightarrow x_0^2=9$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\boxed{x_0=3}\\ \text{ή}\\ x_0=-3 \text{ Απορ}\end{cases}$

Εφ: $y-f(3)=f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y-10=\frac{6}{5}(x-3) \Leftrightarrow$

$\boxed{y=\frac{6}{5}x+\frac{32}{5}}$

4. Έστω $g(x)=f(x)(x-1)(x-2)+x-2+x-1=f(x)(x-1)(x-2)+2x-3$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών

$g(1)=-1$ και $g(2)=1$ οπότε $g(1)g(2)<0$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Από Θ.Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$: $g(x_0)=0$

$\Leftrightarrow f(x_0)(x_0-1)(x_0-2)+x_0-2+x_0-1=0 \xLeftrightarrow[x_0\in(1,2)]{:(x_0-1)(x_0-2)}$

$\Leftrightarrow f(x_0)+\frac{1}{x_0-1}+\frac{1}{x_0-2}=0$.

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

ΘΕΜΑ 3ο

1. Αφού ισχύει το Rolle στο $[-4,1]$ ισχύουν:
   - $f(-4)=f(1)$
   - f συνεχής στο $[-4,1] \Rightarrow f$ συνεχής στο 0
   - f παρ/μη στο $(-4,1) \Rightarrow f$ παρ/μη στο 0.

(7 ΜΟΝΑΔΕΣ)

- $f(-4)=f(1) \Leftrightarrow \sqrt{25}-\alpha=(1-\beta)e-1 \Leftrightarrow \boxed{6-\alpha=(1-\beta)e}$ (1)
- f συνεχής στο 0: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\sqrt{x^2+9}-\alpha\right)=\lim_{x\to 0^+}\left((x-\beta)e^x+x^2-2\right)$$

$$3-\alpha=-\beta-2 \Leftrightarrow \boxed{-\alpha=-\beta-5} \quad (2)$$

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} 6-\beta-5=(1-\beta)e \Leftrightarrow 1-\beta=(1-\beta)e \Leftrightarrow \beta=1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \alpha=6$$

2. Για $x<0$: $f(x)=\sqrt{x^2+9}-6$, $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

Για $x>0$: $f(x)=(x-1)e^x+x^2-2$, $f'(x)=e^x+(x-1)e^x+2x=xe^x+2x$,
$f'(x)=(x+2)e^x$

Για $x=0$:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-6-(-3)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=0$$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x-1)e^x+x^2-2-(-3)}{x}=$

Παρατηρήσεις

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1)e^x+x^2+1}{x} \underset{DLH}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+(x-1)e^x+2x}{1}=0$$

Άρα $f'(0)=0$

έτσι $f'(x)=\begin{cases}(x+2)e^x, & x>0\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}, & x\le 0\end{cases}$

3. Από υπόθεση η $y=-x-6$ πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

Συνεπώς: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ και

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=-6$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{3f^2(x)+4x^3\eta\mu(1/x)}{x^2f(x)+x^3+7x^2} \overset{:x^2\neq 0}{=}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+4x\cdot\eta\mu(1/x)}{f(x)+x+7}=A$

Αφού η $y=-x-6$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ και $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=-6$

$\lim_{x\to-\infty}x\,\eta\mu\frac{1}{x} \underset{\substack{\text{για } x\to-\infty\\ \text{το } u\to 0}}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

οπότε $A=\frac{3(-1)^2+4\cdot 1}{-6+7}=\frac{3+4}{1}=7$.

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

4. $x = \ln(2-x^2) - \ln(x-1)$

$\Leftrightarrow x = \ln \dfrac{2-x^2}{x-1} \Leftrightarrow e^x = \dfrac{2-x^2}{x-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)e^x + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ για $x \in (1, \sqrt{2})$

Η f συνεχής στο $[1,\sqrt{2}]$ ως πράξεις συνεχών

$f(1) = -1 < 0$

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}} > 0$

$\Big\} f(1)f(\sqrt{2}) < 0$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Από Bolzano $\exists\, x_0 \in (1,\sqrt{2}) : f(x_0) = 0$

Για $x>0$:

$f'(x) = (x+2)e^x > 0 \Rightarrow f \uparrow$ οπότε η ρίζα μοναδική

ΘΕΜΑ 4ο

1. $x^2 \cdot f(x) = g(x) \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

Αφού η f είναι συνεχής ισχύει ότι

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g'(x)}{2x}$

(7 ΜΟΝΑΔΕΣ)

$= \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} \right] = \dfrac{1}{2} \cdot g''(0) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1.$

οπότε $f(0) = 1$

Έτσι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Παρατηρήσεις

2. $K(x) = x - (x+1)\ln(x+1), \; x \geq 0$

$K'(x) = 1 - \ln(x+1) - 1 = -\ln(x+1) \leq 0$

Άρα η $K(x)$ ↓ ↳ διακεκριμένη ρίζα.

$A = [0, +\infty) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{K \downarrow} K(A) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} K(x), K(0)\right]$

(7 ΜΟΝΑΔΕΣ)

$K(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} K(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - (x+1)\ln(x+1)\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left[(x+1)\left(\underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\to 1} - \underbrace{\ln(x+1)}_{\to +\infty}\right)\right] = -\infty$

Οπότε $\boxed{K(A) = (-\infty, 0]}$

3α) Ισχύει για $h \neq 0$ $f(h) = \dfrac{g(h)}{h^2} = \dfrac{\ln(h^2+1)}{h^2}$

και $f(0) = 1$

οπότε $\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}}$

Για $x \neq 0$ $f'(x) = \dfrac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot x^2 - 2x\ln(x^2+1)}{x^4} =$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

$= 2\dfrac{\frac{x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^3} = 2\dfrac{x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)}{x^3(x^2+1)}$

$= 2\dfrac{K(x^2)}{x^3(x^2+1)}$ $K(x^2) \to \leq 0$ (Από το σύνολο τιμών)

Για $x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ Άρα $f \downarrow$ στο $[0, +\infty)$ (συνεχής)

Για $x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ Άρα $f \uparrow$ στο $(-\infty, 0]$ (-//-)

Παρατηρήσεις

3)

β) $(x_0^2+1)^{2\alpha^2\beta^2} = (\alpha^2+1)^{\beta^2 x_0^2} \cdot (\beta^2+1)^{\alpha^2 x_0^2}$

$\Leftrightarrow \ln (x_0^2+1)^{2\alpha^2\beta^2} = \ln\left[(\alpha^2+1)^{\beta^2x_0^2} \cdot (\beta^2+1)^{\alpha^2x_0^2}\right]$

$\Leftrightarrow 2\alpha^2\beta^2 \cdot \ln(x_0^2+1) = \ln(\alpha^2+1)^{\beta^2x_0^2} + \ln(\beta^2+1)^{\alpha^2x_0^2}$

$\Leftrightarrow 2\alpha^2\beta^2 \ln(x_0^2+1) = \beta^2x_0^2 \ln(\alpha^2+1) + \alpha^2x_0^2\ln(\beta^2+1)$

$\underset{\alpha,\beta,x_0>0}{\overset{:\alpha^2\cdot\beta^2\cdot x_0^2}{\Longleftrightarrow}} 2\dfrac{\ln(x_0^2+1)}{x_0^2} = \dfrac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha^2} + \dfrac{\ln(\beta^2+1)}{\beta^2}$

$\Leftrightarrow \quad 2f(x_0) = f(\alpha) + f(\beta)$ (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Έστω $h(x) = 2f(x) - f(\alpha) - f(\beta)$

Η h συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών.

- $h(\alpha) = f(\alpha) - f(\beta) > 0$

Αφού $\alpha < \beta \underset{\text{στο } [0,+\infty)}{\overset{f \downarrow}{\Longleftrightarrow}} f(\alpha) > f(\beta)$

- $h(\beta) = f(\beta) - f(\alpha) < 0$

Συνεπώς $h(\alpha)h(\beta) < 0$

Από Θ Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$:

$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2f(x_0) = f(\alpha) + f(\beta)$