Θέμα Α

Α1 –γ , Α2 – α , Α3 – δ , Α4 – α , Α5 α – Λ, β – Σ , γ – Σ , δ – Λ , ε – Σ

Θέμα Β

Β1.

Α. Σωστή απάντηση είναι η (β).

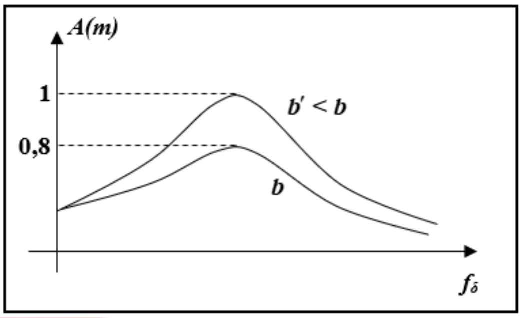
Το σώμα σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 2\pi\, s$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 20 φορές. Σε μία ταλάντωση διέρχεται δύο φορές από τη θέση ισορροπίας οπότε έχει εκτελέσει δέκα ταλαντώσεις. Άρα η περίοδος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι:

$T_\delta = \frac{\Delta t}{N} = \frac{2\pi}{10} s \Rightarrow T_\delta = \frac{\pi}{5} s \rightarrow f_\delta = \frac{1}{T_\delta} = \frac{5}{\pi} Hz$. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_0 = \frac{5}{\pi} Hz$, οπότε το σύστημα είναι σε κατάσταση συντονισμού έχοντας πλάτος $A_{max} = 0{,}8m$. Για συχνότητα $f'_\delta > f_0$ το πλάτος μειώνεται οπότε μπορεί να είναι $A = 0{,}5m$.

Β. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Από το διάγραμμα του πλάτους μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης σε συνάρτηση με συχνότητα του διεγέρτη για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης φαίνεται ότι όσο μειώνεται η σταθερά απόσβεσης τόσο αυξάνεται το πλάτος. Οπότε αν ελαττωθεί η σταθερά απόσβεσης $b' < b \Rightarrow A' > A$

Άρα μπορεί να πάρει την τιμή $A' = 1m$



Β2. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα έχει εκτελέσει 40 πλήρεις ταλαντώσεις και η ενέργεια της φθίνουσας έχει μειωθεί στο ένα τέταρτο της αρχικής άρα: $E_1 = \frac{1}{4}E_0 \Rightarrow \frac{1}{2}DA_1^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}DA_0^2 \Rightarrow A_1^2 = \frac{1}{4}A_0^2 \Rightarrow$

$$A_1 = \frac{1}{2}A_0 \Rightarrow A_0 e^{-\Lambda t_1} = \frac{1}{2}A_0 \Rightarrow e^{-\Lambda t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Lambda t_1 = ln2 \Rightarrow \Lambda = \frac{ln2}{t_1} = \frac{ln2}{N_1 T} = \frac{ln2}{40T}$$

Τη χρονική στιγμή t_2 το σώμα έχει εκτελέσει συνολικά 120 πλήρεις ταλαντώσεις άρα $t_2 = N_2 T = 120T$.Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_2 = A_0 e^{-\Lambda t_2}$

όπου $\Lambda t_2 = \frac{ln2}{40T}120T = 3\cdot ln2 = ln2^3 = ln8$ οπότε $A_2 = A_0 e^{-ln8} = \frac{A_0}{e^{ln8}} = \frac{A_0}{8} \Rightarrow A_2 = \frac{A_0}{8}$

Τη χρονική στιγμή t_2 η ενέργεια της ταλάντωσης είναι:

$$E_2 = \frac{1}{2}DA_2^2 = \frac{1}{2}D\frac{A_0^2}{64} = \frac{1}{64}\frac{1}{2}DA_0^2 \Rightarrow E_2 = \frac{E_0}{64}$$

Το έργο της δύναμης αντίστασης $F_{αντ}$ που αντιτίθεται στην κίνηση του σώματος από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $W_{F_{αντ}} = E_2 - E_1 = \frac{E_0}{64} - \frac{E_0}{4} \Rightarrow W_{F_{αντ}} = -\frac{15}{64}E_0$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Θεωρώντας θετικά προς τα πάνω σε μια τυχαία θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας του συστήματος για τον μικρό κύβο έχουμε: $\Sigma F_{2y} = m_2\alpha \Rightarrow F_{επαφής} - m_2 g = -\omega^2 y \Rightarrow F_{επαφής} = m_2 g - m_2\omega^2 y$

Για να μη χάσει την επαφή του με τον δίσκο πρέπει στον κύβο $F_{επαφής} \geq 0 \Rightarrow m_2 g - m_2\omega^2 y \geq 0 \Rightarrow$

$m_2 g \geq m_2\omega^2 y \Rightarrow y \leq \frac{g}{\omega^2}$ όπου $D = k = m_{ολ}\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m_1 + m_2}$ άρα $y \leq \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$

Από τη θέση ισορροπίας του συστήματος ισχύει:

$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = m_{ολ}g \Rightarrow k\ell = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \ell = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$ άρα $y \leq \ell \rightarrow y_{max} = \ell = A_{max}$ το μέγιστο επιτρεπόμενο πλάτος για να μη χάνουν επαφή τα σώματα στη διάρκεια της ταλάντωσης.

Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ από τη στιγμή που επιδρά η δύναμη $\vec{F}$ στη θέση ισορροπίας του συστήματος και μέχρι να καταργηθεί στην κάτω ακραία θέση έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{m_{ολ}g} + W_{F_{ελ}} + W_F \Rightarrow 0 - 0 = m_{ολ} g A_{max} + \frac{1}{2}k\ell^2 - \frac{1}{2}k\left(\ell + A_{max}\right)^2 + F \cdot A_{max}$$

$$0 - 0 = m_{ολ} g A_{max} + \frac{1}{2}k\ell^2 - \frac{1}{2}k\ell^2 - \frac{1}{2}kA_{max}^2 - k\ell A_{max} + F \cdot A_{max} \Rightarrow$$

$$0 = \left(m_{ολ} g - k\ell\right) A_{max} - \frac{1}{2}kA_{max}^2 + F \cdot A_{max} \Rightarrow \quad \text{όμως} \quad m_{ολ} g = k\ell$$

$$\frac{1}{2}kA_{max}^2 = F \cdot A_{max} \Rightarrow F = \frac{1}{2}k \cdot A_{max} \Rightarrow F = \frac{1}{2}k \cdot \ell = \frac{1}{2}k\frac{\left(m_1 + m_2\right)g}{k} = \frac{1}{2}2mg \Rightarrow F = mg$$

Θέμα Γ

Γ1. Από τις εξισώσεις απομάκρυνσης $x_1 = 0,2 \cdot ημ\left(10t\right)\ S.I.$ και $x_2 = 0,2 \cdot ημ\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\ S.I.$ των ταλαντώσεων έχουμε: $A_1 = 0,2m,\ \varphi_{01} = 0$ και $A_2 = 0,2m,\ \varphi_{02} = \frac{\pi}{2}rad$, η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{\pi}{2}rad$ Για το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης ισχύει: $A_{ολ} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot συν\Delta\varphi}$ όμως $συν\Delta\varphi = συν\frac{\pi}{2} = 0$ άρα $A_{ολ} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0,2\sqrt{2}m$

Για την αρχική φάση της σύνθετης ταλάντωσης έχουμε:

$$εφθ = εφ\varphi_0 = \frac{A_2 \cdot ημ\Delta\varphi}{A_1 + A_2 \cdot συν\Delta\varphi} = \frac{A_2 \cdot 1}{A_1 + A_2 \cdot 0} = \frac{A_2}{A_1} = 1 \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4}rad$$

Η εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα είναι:

$$x = A_{ολ} \cdot ημ\left(\omega t + \varphi_0\right) \Rightarrow x = 0,2\sqrt{2} \cdot ημ\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)\ S.I.$$

Γ2. Το μέτρο της επιτάχυνσης της σύνθετης ταλάντωσης μηδενίζεται για πρώτη φορά όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση, δηλαδή $x = 0, \upsilon < 0$,

άρα $x = 0 \Rightarrow ημ\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \rightarrow 10t + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi \ \left(1\right)$ ή $10t + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi \ \left(2\right)$

Επειδή $\upsilon < 0$ από $\left(2\right) \Rightarrow 10t = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{8\kappa\pi + 3\pi}{40}$ για πρώτη φορά $\kappa = 0 \rightarrow t = \frac{3\pi}{40}s$

Γ3. Για πρώτη φορά $x_2 = -0,2m$ τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow t = \frac{\pi}{10}s$.

Τότε $x = 0,2\sqrt{2} \cdot ημ\left(10\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{4}\right) = 0,2\sqrt{2} \cdot ημ\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0,2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)m \Rightarrow x = -0,2m$

Άρα $U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \Rightarrow U = 2J$.

Η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης είναι: $E = \frac{1}{2}DA_{ολ}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A_{ολ}^2 \Rightarrow E = 4J$

Η κινητική ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης από την ΑΔΕΤ είναι:
$E = K + U \Rightarrow K = E - U \Rightarrow K = 2J$

Άρα ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια για τη σύνθετη ταλάντωση είναι: $\frac{K}{U} = 1$

Γ4. Τη χρονική στιγμή $t = 3T$ που διπλασιάζουμε ακαριαία μόνο την ενέργεια της δεύτερης ταλάντωσης το πλάτος της είναι: $E_2' = 2E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}DA_2'^2 = 2\frac{1}{2}DA_2^2 \Rightarrow A_2' = \sqrt{2}A_2 = 0,2\sqrt{2}m$.

Η φάση της πρώτης ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t=3T$ είναι $\varphi_1=\omega t=6\pi\,rad$ και της δεύτερης ταλάντωσης είναι $\varphi_2=\omega t+\frac{\pi}{2}=\left(6\pi+\frac{\pi}{2}\right)rad$. Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων τότε θα είναι $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}rad$. Για το νέο πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης έχουμε:

$$A'_{ολ}=\sqrt{A_1^2+A_2'^2+2A_1A_2'\cdot συν\Delta\varphi}\Rightarrow A'_{ολ}=\sqrt{A_1^2+A_2'^2}=0,2\sqrt{3}m \text{ όπου } συν\Delta\varphi=συν\frac{\pi}{2}=0$$

Η φάση της σύνθετης ταλάντωσης είναι $\varphi=\omega t+\varphi'_0=6\pi rad+\varphi'_0$

όπου $εφ\theta'=εφ\varphi'_0=\frac{A'_2\cdot ημ\Delta\varphi}{A_1+A'_2\cdot συν\Delta\varphi}=\frac{A'_2\cdot 1}{A_1+A'_2\cdot 0}=\frac{A'_2}{A_1}=\sqrt{2}$.

Άρα $x'=A'_{ολ}\cdot ημ(\omega t+\varphi_0)\Rightarrow x=0,2\sqrt{3}\cdot ημ(10t+\varphi'_0)\ S.I.$ Την απομάκρυνση της σύνθετης ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t'=3T+\frac{T}{8}$ θα την υπολογίσουμε από την αρχή της επαλληλίας δηλαδή: $x'=x_1+x'_2=A_1ημ(\omega t)+A_2ημ(\omega t+\varphi_{02})$ όπου $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{5}s$ και $t'=3T+\frac{T}{8}=\left(\frac{3\pi}{5}+\frac{\pi}{40}\right)s$

$$\text{Άρα } x'=0,2ημ\left[10\cdot\left(\frac{3\pi}{5}+\frac{\pi}{40}\right)\right]+0,2\sqrt{2}ημ\left[10\cdot\left(\frac{3\pi}{5}+\frac{\pi}{40}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow$$

$$x'=0,2ημ\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)+0,2\sqrt{2}ημ\left(6\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=0,2ημ\left(\frac{\pi}{4}\right)+0,2\sqrt{2}ημ\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow x'=\left(0,1\sqrt{2}+0,2\right)m$$

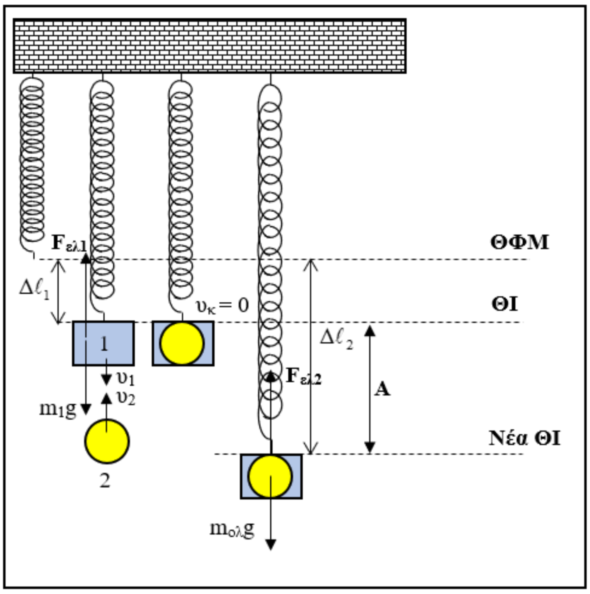
Θέμα Δ

Δ1. Στη θέση ισορροπίας του σώματος $Σ_1$ ισχύει:

$\Sigma F_1=0\Rightarrow F_{ελ1}=m_1g\Rightarrow k\cdot\Delta\ell_1=m_1g\Rightarrow$

$\Delta\ell_1=\frac{m_1g}{k}=0,1m$

Η γωνιακή συχνότητα του σώματος είναι $D=k=m_1\omega_1^2\Rightarrow\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m_1}}=10\frac{rad}{s}$ και το πλάτος ταλάντωσης είναι $A_1=d=0,15m$. Η ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ πριν την κρούση έχει μέτρο $\upsilon_1=\upsilon_{1max}=\omega_1A_1=1,5\frac{m}{s}$. Από τη γραφική παράσταση της ταχύτητας το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση παραμένει στιγμιαία ακίνητο, $\upsilon_\kappa=0$, οπότε από την ΑΔΟ έχουμε:



$\vec{p}_{ολ,πριν}=\vec{p}_{ολ,μετά}\Rightarrow\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_\kappa\Rightarrow$

$-m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=0\Rightarrow\upsilon_2=\frac{m_1\upsilon_1}{m_2}\Rightarrow\upsilon_2=0,5\frac{m}{s}$

Δ2. Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα είναι στιγμιαία ακίνητο (όπως φαίνεται και από το διάγραμμα) στην άνω ακραία θέση και στη συνέχεια εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας που είναι πιο κάτω από τη θέση ισορροπίας του σώματος $Σ_1$.

Στη θέση ισορροπίας ταλάντωσης του συστήματος ισχύει:

$\Sigma F_2=0\Rightarrow F_{ελ2}=m_{ολ}g\Rightarrow k\cdot\Delta\ell_2=m_{ολ}g\Rightarrow\Delta\ell_2=\frac{m_{ολ}g}{k}=0,4m$.

Το πλάτος της νέας απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα είναι $A=\Delta\ell_2-\Delta\ell_1=0,3m$. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα θα κινηθεί προς την αρνητική κατεύθυνση. Η εξίσωση της ταχύτητας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι: $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$ για $0 \le t \le t_1$

όπου $\omega = \sqrt{\dfrac{D}{m_{o\lambda}}} = \sqrt{\dfrac{k}{m_{o\lambda}}} = 5\dfrac{rad}{s}$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}4\pi\, s$, $\upsilon_{max} = \omega A = 0{,}15\dfrac{m}{s}$, $t_1 = \dfrac{3T}{2} = 0{,}6\pi\, s$

και για την αρχική φάση έχουμε τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε: $y = +A \Rightarrow A\cdot\eta\mu(\omega t + \varphi_0) = +A \Rightarrow$

$\eta\mu(\omega\cdot 0 + \varphi_0) = +1 \Rightarrow \eta\mu(\varphi_0) = \eta\mu\dfrac{\pi}{2} \rightarrow \varphi_0 = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \xrightarrow{\kappa=0} \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2} rad$.

Άρα $\upsilon = 1{,}5\cdot\sigma\upsilon\nu\left(5t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ $S.I.$ με $0 \le t \le 0{,}6\pi\, s$.

Δ3. Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος για πρώτη φορά μετά την κρούση μεγιστοποιείται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης καθώς το σώμα κατεβαίνει και κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα ταλάντωσης, δηλαδή: $\upsilon = -\upsilon_{max} \Rightarrow 1{,}5\cdot\sigma\upsilon\nu\left(5t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -1{,}5 \Rightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) = -1 = \sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow 5t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \pi \Rightarrow 5t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{4\kappa\pi + \pi}{10}$$

Για πρώτη φορά $\kappa = 0 \rightarrow t = \dfrac{\pi}{10} s = 0{,}1\pi\, s$

Δ4. Ισχύει $F_{\varepsilon\lambda} = \dfrac{F_{\varepsilon\lambda,max}}{2} \Rightarrow k\cdot\Delta\ell = \dfrac{k\cdot\Delta\ell_{max}}{2} \Rightarrow \Delta\ell = \dfrac{\Delta\ell_{max}}{2}$.

Μέγιστη παραμόρφωση έχει το ελατήριο στην κάτω ακραία θέση και είναι $\Delta\ell_{max} = \Delta\ell_1 + 2A = 0{,}7m$

Άρα $\Delta\ell = \dfrac{\Delta\ell_{max}}{2} = 0{,}35m$ απέχει το συσσωμάτωμα από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης απέχει:

$|y| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell = 0{,}4m - 0{,}35m = 0{,}05m \xrightarrow{y>0} y = +0{,}05m$

Οπότε η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:

$U = \dfrac{1}{2}Dy^2 = \dfrac{1}{2}ky^2 \Rightarrow U = \dfrac{1}{8}J = 0{,}125J$.

Δ5. Τη χρονική στιγμή $t_1 = \dfrac{3T}{2} = 0{,}6\pi\, s$ το συσσωμάτωμα είναι στην κάτω ακραία θέση. Με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$ για το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1 = 0{,}4s$ το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (όπως φαίνεται και από το διάγραμμα) με επιτάχυνση $\alpha = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \dfrac{3-0}{0{,}4}\dfrac{m}{s^2} \Rightarrow \alpha = 7{,}5\dfrac{m}{s^2}$. Τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + 0{,}4s$ που καταργείται η δύναμη $\vec{F}$ το σώμα έχει αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon = 3\dfrac{m}{s}$ (φαίνεται από το διάγραμμα) και έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta y = d = \dfrac{1}{2}a(\Delta t)^2 = 0{,}6m$ και θα βρίσκεται στην άνω ακραία θέση της προηγούμενης ταλάντωσης $(d = 2A = 0{,}6m)$. Εφαρμόζοντας ΑΔΕΤ τη στιγμή που καταργείται η δύναμη $\vec{F}$ θα υπολογίσουμε το πλάτος A' της νέας ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα.

Έχουμε: $E' = K' + U' \Rightarrow \dfrac{1}{2}DA'^2 = \dfrac{1}{2}m_{o\lambda}\upsilon^2 + \dfrac{1}{2}Dy'^2$ όπου $|y'| = A = 0{,}3m$

Άρα $A'^2 = \dfrac{m_{o\lambda}}{D}\upsilon^2 + y'^2 \xrightarrow{D=k} A'^2 = \dfrac{4}{100}\cdot 9 + \dfrac{9}{100} \Rightarrow A'^2 = \dfrac{45}{100} \Rightarrow A' = \sqrt{0{,}45}m = 0{,}3\sqrt{5}m$