Θέμα Α

Α1 –γ , Α2 – γ , Α3 – δ , Α4 – β , Α5 α – Λ, β – Λ , γ – Σ , δ – Λ , ε – Λ

Θέμα Β

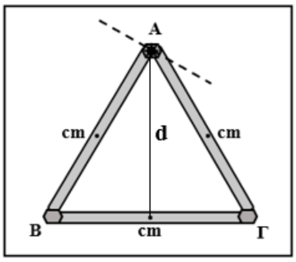
Β1. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

$I_{ολ(Α)} = I_{ΑΒ} + I_{ΑΓ} + I_{ΒΓ}$

όπου $I_{ΑΒ} = I_{ΑΓ} = I_{cm} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}m\ell^2$ και

$I_{ΒΓ} = I_{cm} + md^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}\right) = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{3}{4}m\ell^2 = \frac{5}{6}m\ell^2$

Άρα $I_{ολ(Α)} = 2\cdot\frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{5}{6}m\ell^2 \Rightarrow I_{ολ(Α)} = \frac{3}{2}m\ell^2$



Β2. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Ισχύει ΑΔΕΤ: $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm\omega\sqrt{A^2 - \frac{3}{4}A^2} \Rightarrow$

$\upsilon = \pm\frac{\omega A}{2} \Rightarrow \pm\omega A = 2\upsilon$

Ισχύει $a = -a_{\max}\eta\mu(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow a = -\omega^2 x \Rightarrow a = \pm\omega^2\frac{\sqrt{3}}{2}A \Rightarrow$

$a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 A \Rightarrow a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\cdot\omega A \Rightarrow a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\cdot 2\upsilon \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}\omega\cdot\upsilon$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

ΑΔΟxx': $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_{1x} \Rightarrow m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_{1x} \Rightarrow$

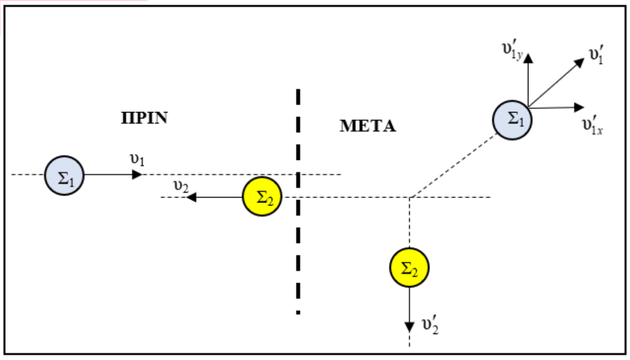
$3m\upsilon - 2m\upsilon = 3m\upsilon'_{1x} \Rightarrow \upsilon'_{1x} = \frac{\upsilon}{3}$

ΑΔΟyy': $\vec{0} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow 0 = m_1\upsilon'_{1y} - m_2\upsilon'_2 \Rightarrow$

$3m\upsilon'_{1y} = 2m\upsilon'_2 \Rightarrow \upsilon'_{1y} = \frac{2}{3}\upsilon'_2$

ΑΔΚΕ: $K_{ολ,πριν} = K_{ολ,μετά} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \Rightarrow$

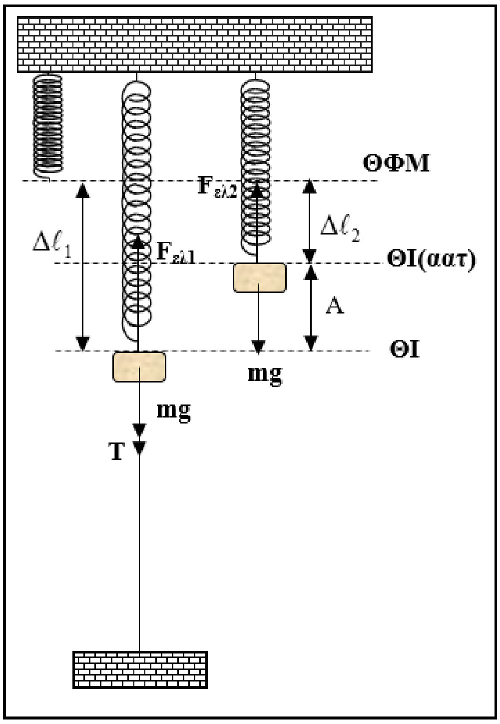


$3m\upsilon^2 + 2m\upsilon^2 = 3m\upsilon_1'^2 + 2m\upsilon_2'^2 \Rightarrow 5\upsilon^2 = 3\left(\upsilon_{1x}'^2 + \upsilon_{1y}'^2\right) + 2\upsilon_2'^2 \Rightarrow 5\upsilon^2 = 3\left(\frac{\upsilon^2}{9} + \frac{4}{9}\upsilon_2'^2\right) + 2\upsilon_2'^2 \Rightarrow$

$5\upsilon^2 = \frac{\upsilon^2}{3} + \frac{4}{3}\upsilon_2'^2 + 2\upsilon_2'^2 \Rightarrow \frac{14}{3}\upsilon^2 = \frac{10}{3}\upsilon_2'^2 \Rightarrow 7\upsilon^2 = 5\upsilon_2'^2 \Rightarrow \upsilon'_2 = \sqrt{\frac{7}{5}}\upsilon$

Θέμα Γ

Γ1. Από το διάγραμμα έχουμε:



$$A=0,4m,\ E=4J\Rightarrow \frac{1}{2}kA^2=4J\Rightarrow k\frac{16}{100}=8\Rightarrow k=50\frac{N}{m}$$

Στη ΘΙ ισχύει: $\Sigma F_1=0\Rightarrow F_{ελ1}=T+mg\Rightarrow$

$$k\Delta\ell_1=2mg\Rightarrow \Delta\ell_1=\frac{2mg}{k}$$

Στη ΘΙ(ααт) ισχύει: $\Sigma F_2=0\Rightarrow F_{ελ2}=mg\Rightarrow$

$$k\Delta\ell_2=mg\Rightarrow \Delta\ell_2=\frac{mg}{k}$$

Μόλις κόβεται το νήμα το σώμα ξεκινά από την κάτω ακραία θέση να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Ισχύει $A=\Delta\ell_1-\Delta\ell_2=\frac{2mg}{k}-\frac{mg}{k}\Rightarrow A=\Delta\ell_2=\frac{mg}{k}\Rightarrow$

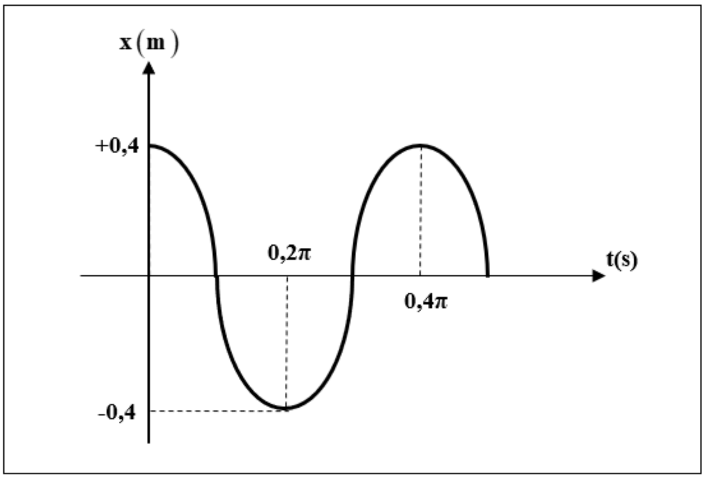
$$\Delta\ell_2=\frac{mg}{k}\Rightarrow \frac{m}{k}=\frac{\Delta\ell_2}{g}.$$

Η περίοδος της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell_2}{g}}\quad \text{όπου } A=\Delta\ell_2=0,4m$$

Άρα $T=2\pi\sqrt{\frac{0,4}{10}}s\Rightarrow T=0,4\pi\, s$

Γ2. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα ξεκινά ταλάντωση από την κάτω ακραία θέση στα θετικά του άξονα άρα $x=+A=+0,4m$.



Για την αρχική φάση της ταλάντωσης έχουμε:

$$x=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\Rightarrow +A=\eta\mu(\varphi_0)\Rightarrow$$

$$\eta\mu(\varphi_0)=+1=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi_0=\frac{\pi}{2}.$$

Η εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης είναι: $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$

όπου $\omega=\frac{2\pi}{T}=5\frac{rad}{s}$.

Άρα $x=0,4\eta\mu\left(5t+\frac{\pi}{2}\right)\ S.I.$

Γ3. Όταν μηδενιστεί για πρώτη φορά το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου $F_{ελ}=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους στην άνω ακραία θέση $x=-A$ για πρώτη φορά. Αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t=\frac{T}{2}\Rightarrow t=0,2\pi\, s$

Γ4. Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς είναι μπορεί να είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου μόνο μεταξύ θέσης ισορροπίας ταλάντωσης και θέσης φυσικού μήκους του ελατηρίου. Στις θέσεις κάτω από τη θέση ισορροπίας ισχύει $F_{ελ}>|\Sigma F|$. Άρα σε μια τυχαία θέση μεταξύ ΘΦΜ και ΘΙ ισχύει: $F_{ελ}=|\Sigma F|\Rightarrow k\cdot x_{ΘΦΜ}=k|x|\Rightarrow x_{ΘΦΜ}=|x|\Rightarrow \Delta\ell_2-|x|=|x|\Rightarrow 2|x|=\Delta\ell_2\Rightarrow$

$$|x|=\frac{\Delta\ell_2}{2}=0,2m \text{ όμως } x<0 \text{ άρα } x=-\frac{\Delta\ell_2}{2}=-0,2m=-\frac{A}{2}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{dK}{dt}=\frac{dW_{\Sigma F}}{dt}=\frac{\Sigma F\cdot dx}{dt}=\Sigma F\cdot \upsilon=-kx\upsilon$$

Η ταχύτητα του σώματος όταν αυτό έχει απομάκρυνση $x=-\frac{A}{2}=-0,2m$ θα υπολογιστεί από την ΑΔΕΤ: $E=K+U\Rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}kx^2\Rightarrow \upsilon=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}\Rightarrow \upsilon=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\omega A=\pm\sqrt{3}\frac{m}{s}$

Όταν το σώμα κινείται προς τα πάνω (προς την ακραία θέση) έχουμε : $x=-0,2m$ και $\upsilon=-\sqrt{3}\frac{m}{s}$

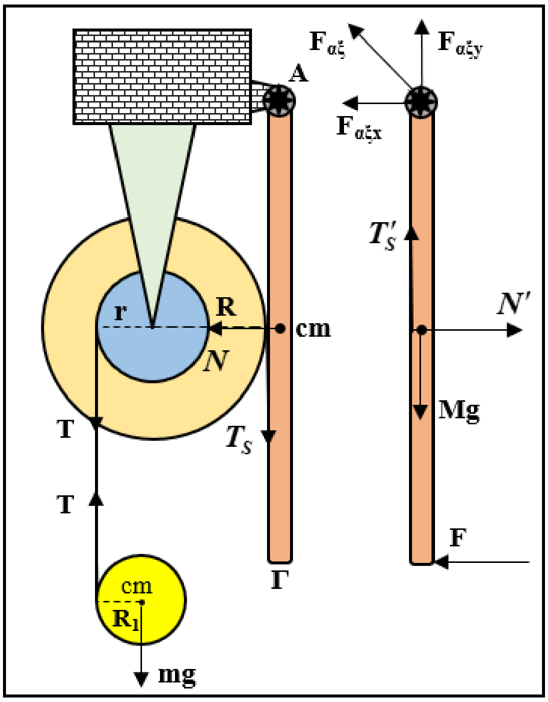
άρα $\frac{dK}{dt}=-kx\upsilon=-50(-0,2)(-\sqrt{3})\frac{J}{s}\Rightarrow \frac{dK}{dt}=-10\sqrt{3}\frac{J}{s}$

Όταν το σώμα κινείται προς τα κάτω (προς τη θέση ισορροπίας) έχουμε : $x=-0,2m$ και $\upsilon=+\sqrt{3}\frac{m}{s}$

άρα $\frac{dK}{dt}=-kx\upsilon=-50(-0,2)(+\sqrt{3})\frac{J}{s}\Rightarrow \frac{dK}{dt}=+10\sqrt{3}\frac{J}{s}$

Θέμα Δ

Δ1. Στη διπλή τροχαλία δέχεται την τάση του νήματος $\vec{T}$, την στατική τριβή $\vec{T}_S$ και την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τη ράβδο. Ο τροχός δέχεται το βάρος το $m\vec{g}$ την τάση του νήματος $\vec{T}$. Για τη σύνθετη κίνηση που εκτελεί ο τροχός εφαρμόζοντας τους θεμελιώδης νόμους.



ΘΝΜ : $\Sigma F_x=ma_{cm}\Rightarrow mg-T=ma_{cm}$ (1)

ΘΝΣ: $\Sigma\tau=I_{cm}a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow TR_1=\frac{1}{2}mR_1^2a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$

$T=\frac{1}{2}mR_1a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow T=\frac{1}{2}ma_{cm}\,(2)$

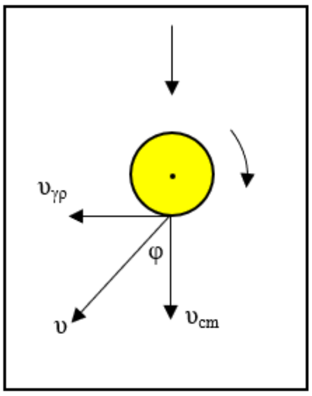
όπου $R_1a_{\gamma\omega\nu}=a_{cm}$ αφού το νήμα ξετυλίγεται από την περιφέρεια του δίσκου χωρίς να γλιστράει.

Προσθέτοντας κατά μέλη $(1)+(2)$ έχουμε:

$$mg-T+T=ma_{cm}+\frac{1}{2}ma_{cm}$$

$$mg=\frac{3}{2}ma_{cm}\Rightarrow a_{cm}=\frac{2g}{3}=\frac{20}{3}\frac{m}{s^2}$$

Δ2. Το κατώτερο σημείο του του τροχού έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_{cm}+\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$.



Μέτρο ταχύτητας: $\upsilon=\sqrt{\upsilon_{cm}^2+\upsilon_{\gamma\rho}^2}$ όπου κατά μέτρο $\upsilon_{cm}=\upsilon_{\gamma\rho}=R_1\omega$

άρα $\upsilon=\upsilon_{cm}\sqrt{2}$. Τη χρονική στιγμή $t_1=1,5s$ $\upsilon_{cm}=a_{cm}t_1=10\frac{m}{s}$

οπότε $\upsilon=10\sqrt{2}\frac{m}{s}$. Η κατεύθυνση της ταχύτητας σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία φ για την οποία ισχύει: $\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{\upsilon_{cm}}=1\to\varphi=45^o$.

Δ3. Η τάση του νήματος που δέχεται η διπλή τροχαλία έχει μέτρο που υπολογίζεται από τη σχέση $(2)\Rightarrow T=\frac{1}{2}ma_{cm}\Rightarrow T=10N$.

Η διπλή τροχαλία δε στρέφεται άρα $\Sigma\tau_{τροχ}=0\Rightarrow \tau_{T_S}=\tau_{T}\Rightarrow T_S R=Tr\Rightarrow T_S=T\dfrac{r}{R}\Rightarrow T_S=5N$

Δ4. Στη ράβδο ασκούνται το βάρος της $M\vec{g}$, η δύναμη $\vec{F}$, η δύναμη του άξονα $\vec{F}_{αξ}$ η στατική τριβή $\vec{T}_S'$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}'$ από τη διπλή τροχαλία. Η ράβδος ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση οπότε από τις συνθήκες ισορροπίας έχουμε:

$\Sigma F_x=0\Rightarrow F+F_{αξx}=N'$ (3)

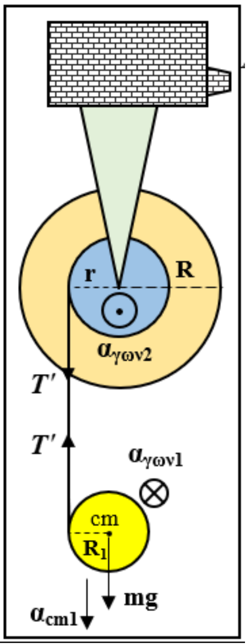
$\Sigma F_y=0\Rightarrow F_{αξy}+T_S'=Mg$, κατά μέτρο $T_S'=T_S=5N$ άρα $F_{αξy}=Mg-T_S'\Rightarrow F_{αξy}=15N$

$\Sigma\tau_{A}=0\Rightarrow \tau_{N'}-\tau_F=0\Rightarrow N'\dfrac{\ell}{2}=F\ell\Rightarrow N'=2F\Rightarrow N'=30N$

Από τη σχέση (3) έχουμε: $F_{αξx}=N'-F\Rightarrow F_{αξx}=15N$

Για το μέτρο της δύναμης του άξονα έχουμε:

$F_{αξ}=\sqrt{F_{αξx}^2+F_{αξx}^2}\Rightarrow F_{αξ}=\sqrt{15^2+15^2}N\Rightarrow F_{αξ}=15\sqrt{2}N$



Δ5. Τη χρονική στιγμή $t_2=3s$ που απομακρύνουμε τη ράβδο από την περιφέρεια του δίσκου ακτίνας R της διπλής τροχαλίας, το κέντρο μάζας του τροχού έχει αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon_{cm2}=\alpha_{cm}t_2\Rightarrow \upsilon_{cm2}=20\dfrac{m}{s}$.

Στη διπλή τροχαλία ασκείται μόνο η τάση του νήματος $\vec{T}'$ οπότε αρχίζει να στρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{γων2}$. Ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση έχοντας επιτάχυνση κέντρου μάζας $\vec{\alpha}_{cm1}$ και γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{γων1}$. Εφαρμόζοντας τους θεμελιώδεις νόμους έχουμε:

Για τον τροχό: ΘΝΜ : $\Sigma F_x=ma_{cm1}\Rightarrow mg-T'=ma_{cm1}$ (4)

ΘΝΣ: $\Sigma\tau_1=I_{cm}a_{γων1}\Rightarrow T'R_1=\dfrac{1}{2}mR_1^2a_{γων1}\Rightarrow T'=\dfrac{1}{2}mR_1a_{γων1}$ (5)

Για τη διπλή τροχαλία: ΘΝΣ: $\Sigma\tau_2=Ia_{γων2}\Rightarrow T'r=Ia_{γων2}$ (6)

Για το σημείο του κατακόρυφου νήματος στην περιφέρεια r της διπλής τροχαλίας ισχύει $\upsilon_{γρ2}=r\omega_2$. Για το σημείο του κατακόρυφου νήματος στην περιφέρεια του τροχού ισχύει $\vec{\upsilon}_{νημ1}=\vec{\upsilon}_{cm1}+\vec{\upsilon}_{γρ1}\Rightarrow \upsilon_{νημ}=\upsilon_{cm1}-\upsilon_{γρ1}=\upsilon_{cm1}-R_1\omega_1$.

Όμως ισχύει $\upsilon_{γρ2}=\upsilon_{νημ1}\Rightarrow r\omega_2=\upsilon_{cm1}-R_1\omega_1\rightarrow r\dfrac{d\omega_2}{dt}=\dfrac{d\upsilon_{cm1}}{dt}-R_1\dfrac{d\omega_1}{dt}\Rightarrow r\alpha_{γων2}=\alpha_{cm1}-R_1\alpha_{γων1}$

Στην τελευταία σχέση αντικαθιστώντας $\alpha_{γων2}$ και $R_1\alpha_{γων1}$ από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε:

$$r\frac{T'r}{I}=\alpha_{cm1}-\frac{2T'}{m}\Rightarrow \frac{T'r^2}{I}=\alpha_{cm1}-\frac{2T'}{m}\Rightarrow T'\left(\frac{r^2}{I}+\frac{2}{m}\right)=\alpha_{cm1}\text{ από (4) } T'=mg-ma_{cm1}\text{ άρα}$$

$$\left(mg-ma_{cm1}\right)\left(\frac{r^2}{I}+\frac{2}{m}\right)=\alpha_{cm1}\Rightarrow\left(30-3a_{cm1}\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\alpha_{cm1}\Rightarrow\alpha_{cm1}=8\frac{m}{s^2}$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού τη χρονική στιγμή $t_3=4s$ είναι:

$$\upsilon_{cm3}=\upsilon_{cm2}+\alpha_{cm1}\Delta t\Rightarrow\upsilon_{cm3}=\upsilon_{cm2}+\alpha_{cm1}\left(t_3-t_2\right)\Rightarrow\upsilon_{cm3}=28\frac{m}{s}$$