Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ (5-9-18)

Παρατηρήσεις

ΘΕΜΑ 1ο

Β. α) Ψευδής

β) Ισχύει $-2<3$ και $f(-2)<f(3)$ οπότε η f είναι $\downarrow$ σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού και όχι συνολικά

Γ. 1. ΛΑΘΟΣ 2. ΛΑΘΟΣ 3. ΛΑΘΟΣ
4. ΣΩΣΤΟ 5. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

1. Για την g: $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 1 \Leftrightarrow |x|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1 \rightarrow A_g=[-1,1]$

Για την h: $1-x^2>0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -1<x<1 \rightarrow A_h=(-1,1)$

Αφού $A_g\neq A_h$ οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες

Για $x\in A_g\cap A_h=(-1,1)$: $h(x)=\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}=\sqrt{1-x^2}=g(x)$

οπότε για $x\in(-1,1)$: $h=g$

2. $g\circ f$; → Ισχύει.

$A_{g\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, -1\leq ημx\leq 1\}=\mathbb{R}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{1-f^2(x)}=\sqrt{1-ημ^2x}=\sqrt{συν^2x}=|συνx|$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{ημx}{x}=0$

$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{ημx}{x}\right|\leq\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|}\leq\dfrac{ημx}{x}\leq\dfrac{1}{|x|} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)\end{array}\right\} \xRightarrow{Κ.Π.} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ημx}{x}=0.$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

$A_{\frac{f}{g}} = \{x \in A_f \cap A_g \,/\, g(x) \neq 0\}$

$= \{-1 \leq x \leq 1 \,/\, x \neq \pm 1\} = (-1, 1)$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ημx}{\sqrt{1-x^2}}$

ΘΕΜΑ 3ο

1. $ημ^2x - x^4 \leq x f(x) \leq ημ^2x + x^4$

• Αν $x>0$: $\frac{ημ^2x}{x} - x^3 \leq f(x) \leq \frac{ημ^2x}{x} + x^3$

• $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{ημ^2x}{x} - x^3\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{ημx}{x} \cdot ημx - x^3\right) = 1 \cdot 0 - 0 = 0$

• $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{ημ^2x}{x} + x^3\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{ημx}{x} \cdot ημx + x^3\right) = 1 \cdot 0 + 0 = 0$

Απο κρ. παρεμβολής $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

Αφού η f συνεχής $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$\Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

2. Το ζητούμενο όριο: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

$ημ^2x - x^4 \leq x f(x) \leq ημ^2x + x^4 \xLeftrightarrow[x\neq 0]{:x^2}$

$\left(\frac{ημx}{x}\right)^2 - x^2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \left(\frac{ημx}{x}\right)^2 + x^2$

• $\lim_{x\to 0} \left(\left(\frac{ημx}{x}\right)^2 - x^2\right) = 1 - 0 = 1$

• $\lim_{x\to 0} \left(\left(\frac{ημx}{x}\right)^2 + x^2\right) = 1 + 0 = 1$

Απο κρ. παρεμβολής $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Αρα $\boxed{f'(0) = 1}$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

3. $x \in [0,1]$

$$g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x}-1)^2$$

$$g(g(x)) = (\sqrt{g(x)} - 1)^2 = \left(\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} - 1\right)^2 =$$

$$= \left(|\sqrt{x}-1| - 1\right)^2 \xrightarrow[\sqrt{x}-1 \le 0]{x \in [0,1]}$$

$$= (1 - \sqrt{x} - 1)^2 = (-\sqrt{x})^2 = \sqrt{x}^2 = x.$$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2\sqrt{x} + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x}-1)^2 = +\infty$

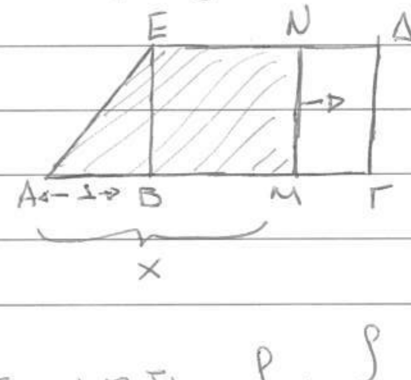
ΘΕΜΑ 4ο

1. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AMN}$ και $\overset{\triangle}{ABE}$ είναι όμοια ($\hat{M} = \hat{B} = 90^\circ$ και $\hat{A}$ = κοινή)

οπότε $\frac{AM}{MN} = \frac{AB}{BE} \Leftrightarrow \frac{x}{MN} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{MN = 2x}$

2. Αν $x \in [0,1]$ το γραμμοσκιασμένο εμβαδό ανήκει σε τρίγωνο: $(\hat{AMN}) = \frac{(AM)\cdot(MN)}{2} = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2$.

Αν $x \in (1,3]$ το γραμμοσκιασμένο εμβαδό ανήκει σε τραπέζιο:



$$(AMNE) = \frac{(\beta + B)\cdot u}{2} =$$

$$= \frac{(EN + AM)\cdot A\Gamma}{2} =$$

$$= \frac{(x-1+x)\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 2x - 1$$

Το εμβαδό: $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 2x-1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

3. $f(x)=\begin{cases} x^2 & , 0\leq x\leq 1 \\ 2x-1 & , 1<x\leq 3. \end{cases}$

• $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$

• $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-1-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 2$

οπότε $\boxed{f'(1)=2}$

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-1-3}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 2$

άρα $\boxed{f'(2)=2}$

• $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f^4(x)-81}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\left(f^2(x)\right)^2-9^2}{x^3-2^3} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(f^2(x)-9)(f^2(x)+9)}{(x-2)(x^2+2x+4)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(f(x)-3)(f(x)+3)(f^2(x)+9)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{f(x)-3}{x-2} \cdot \dfrac{(f(x)+3)(f^2(x)+9)}{x^2+2x+4}\right]$

$= f'(2) \cdot \dfrac{(f(2)+3)(f^2(2)+9)}{12} = \cancel{2} \cdot \dfrac{6\cdot 18}{\cancel{12}} = 18$