Θέμα Α

Α1 –γ , Α2 – β , Α3 – α , Α4 – δ , Α5 α – Λ, β – Σ , γ – Λ , δ – Λ , ε – Σ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Από το διάγραμμα $A = 0,4m$, $\Sigma F_{\max} = 80N$ και $\Sigma F_{\max} = DA \Rightarrow 80 = D \cdot 0,4 \Rightarrow D = 200\dfrac{N}{m}$.

Επίσης $D = m\omega^2 \Rightarrow 200 = 2\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega = 10\dfrac{rad}{s}$ και $\Sigma F = -Dx \Rightarrow -40\sqrt{3} = -200x \Rightarrow x = +0,2\sqrt{3}m$.

Για πρώτη φορά $\Sigma F = -40\sqrt{3}N \to x = +0,2\sqrt{3}m$ και $\upsilon > 0$, από την ΑΔΕΤ $\upsilon = +\omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow$

$\upsilon = +\omega\sqrt{A^2 - x^2} = +10\sqrt{0,16 - 0,12}\dfrac{m}{s} \Rightarrow \upsilon = +2\dfrac{m}{s}$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας του σώματος είναι:

$\dfrac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -40\sqrt{3}\cdot 2\dfrac{J}{s} = -80\sqrt{3}\dfrac{J}{s}$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε:

ΘΝΜ για σώμα: $\Sigma F_1 = m\alpha_1 \Rightarrow mg - T_1 = m\alpha_1$ (1)

ΘΝΣ για στερεό: $\Sigma\tau_1 = I\alpha_{\gamma\omega\nu 1} \Rightarrow T_1 r = I\dfrac{\alpha_1}{r} \Rightarrow T_1 = I\dfrac{\alpha_1}{r^2}$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη $(1) + (2) \Rightarrow mg = m\alpha_1 + I\dfrac{\alpha_1}{r^2} \Rightarrow mg = \left(m + \dfrac{I}{r^2}\right)\alpha_1$ (3)

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε:

ΘΝΜ για σώμα: $\Sigma F_2 = m\alpha_2 \Rightarrow mg - T_2 = m\alpha_2$ (4)

ΘΝΣ για στερεό: $\Sigma\tau_2 = I\alpha_{\gamma\omega\nu 1} \Rightarrow T_2 R = I\dfrac{\alpha_2}{R} \Rightarrow T_2 = I\dfrac{\alpha_2}{R^2}$ (5)

Προσθέτοντας κατά μέλη $(4) + (5) \Rightarrow mg = m\alpha_2 + I\dfrac{\alpha_1}{R^2} \Rightarrow mg = \left(m + \dfrac{I}{R^2}\right)\alpha_2$ (6)

Ισχύει $(3) = (6) \Rightarrow \left(m + \dfrac{I}{r^2}\right)\alpha_1 = \left(m + \dfrac{I}{R^2}\right)\alpha_2 \Rightarrow \left(m + \dfrac{4I}{R^2}\right)\alpha_1 = \left(m + \dfrac{I}{R^2}\right)3\alpha_1 \Rightarrow$

$m + \dfrac{4I}{R^2} = 3m + \dfrac{3I}{R^2} \Rightarrow \dfrac{I}{R^2} = 2m \Rightarrow I = 2mR^2$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Ισχύουν $f_1 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1}{m}}$, $f_2 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_2}{m}}$ και $D = k_1 + k_2$ (με απόδειξη)

Για τη συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος των δύο ελατηρίων – σώμα ισχύει:

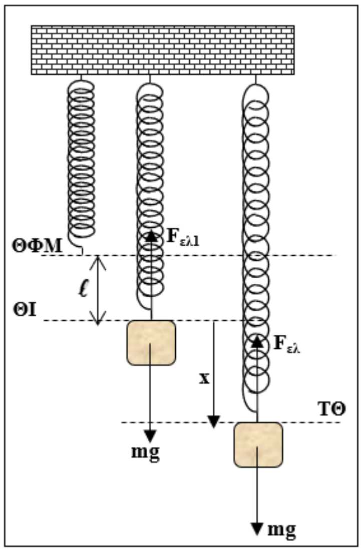
$f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{D}{m}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}} \to f^2 = \dfrac{1}{(2\pi)^2}\dfrac{k_1 + k_2}{m} = \dfrac{1}{(2\pi)^2}\dfrac{k_1}{m} + \dfrac{1}{(2\pi)^2}\dfrac{k_2}{m} = f_1^2 + f_2^2 \Rightarrow$

$f^2 = f_1^2 + f_2^2 \Rightarrow f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \Rightarrow f = 5Hz$

Θέμα Γ

Γ1. Στη ΘΙ ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda 1} = mg \Rightarrow k\ell = mg \Rightarrow \ell = \frac{mg}{k} = 0,2m$$



Στην τυχαία θέση ΤΘ ισχύει:

$$\Sigma F = mg - F_{\varepsilon\lambda} = mg - k(\ell + x) = mg - k\ell - kx \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -kx \rightarrow D = k = 100\frac{N}{m}$$

Γ2. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα αφήνεται από την κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης που εκτελεί $x = +d = +A = +0,4m$.

Για την αρχική φάση της ταλάντωσης έχουμε:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow +A = \eta\mu(\varphi_0) \Rightarrow$$

$$\eta\mu(\varphi_0) = +1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης είναι: $\upsilon = \upsilon_{\max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$

όπου $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{50}\frac{rad}{s}$ και $\upsilon_{\max} = \omega A = 2\sqrt{2}\frac{m}{s}$. Άρα $\upsilon = 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(5\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$ $S.I.$

Γ3. Όταν σώμα διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου θα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x = -\ell = -0,2m$. Η επιτάχυνση της ταλάντωσης θα είναι:

$$\alpha = -\alpha_{\max}\eta\mu(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \alpha = -\omega^2 x = -50(-0,2)\frac{m}{s^2} \Rightarrow \alpha = +10\frac{m}{s^2}$$

Γ4. Στην τυχαία θέση ΤΘ στον θετικό ημιάξονα έχουμε:

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow mg - F_{\varepsilon\lambda} = -kx \Rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda} = mg + kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 20 + 100x \;\; S.I.$$

με $-0,4m \le x \le +0,4m$.

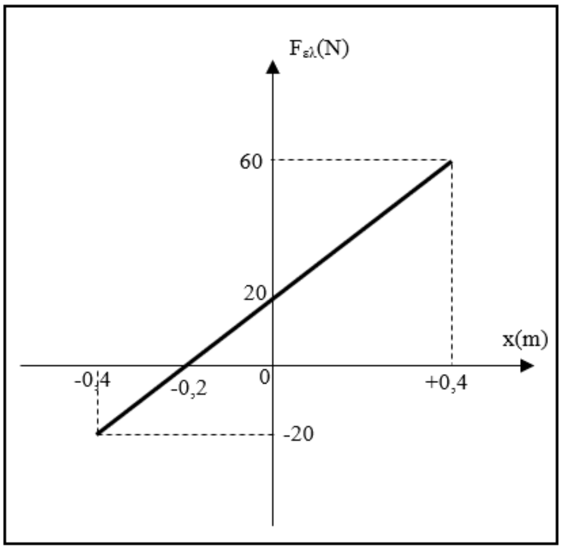
Για τη γραφική παράσταση έχουμε:

$$x = -0,4m \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -20N$$

$$x = +0,4m \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = +60N$$

$$x = 0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 20N$$

$$F_{\varepsilon\lambda} = 0 \rightarrow x = -0,2m$$



Γ5. Το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου είναι $F_{\varepsilon\lambda} = 10N$ δηλαδή $F_{\varepsilon\lambda} = \pm 10N$ αφού δύναμη του ελατηρίου παίρνει τιμές $-20N \le F_{\varepsilon\lambda} \le +60N$ (όταν $F_{\varepsilon\lambda} < 0$ σημαίνει ότι έχει φορά προς τα κάτω, δηλαδή το σώμα είναι πάνω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου). Οι θέσεις του άξονα της ταλάντωσης που η δύναμη του ελατηρίου παίρνει αυτές τις τιμές της είναι:

όταν $F_{\varepsilon\lambda} = -10N$ έχουμε: $F_{\varepsilon\lambda} = 20 + 100x_1 \Rightarrow -10 = 20 + 100x_1 \Rightarrow x_1 = -0,3m$.

όταν $F_{\varepsilon\lambda} = 10N$ έχουμε: $F_{\varepsilon\lambda} = 20 + 100x_2 \Rightarrow 10 = 20 + 100x_2 \Rightarrow x_2 = -0,1m$.

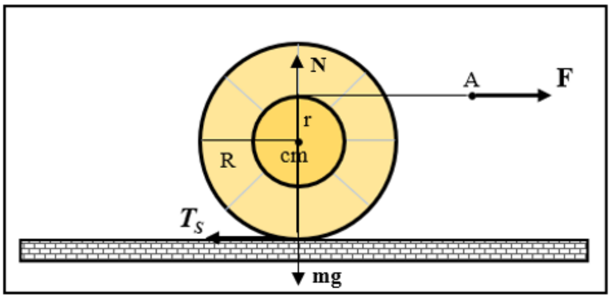
Για το μέτρο της ταχύτητας σε κάθε περίπτωση έχουμε από την ΑΔΕΤ: $|\upsilon| = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

Όταν $x_1 = -0,3m \rightarrow |\upsilon_1| = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2} = 5\sqrt{2}\sqrt{0,16 - 0,09}\frac{m}{s} = \sqrt{50}\sqrt{0,07}\frac{m}{s} \Rightarrow |\upsilon_1| = \sqrt{3,5}\frac{m}{s}$

Όταν $x_2 = -0,1m \rightarrow |\upsilon_2| = \omega\sqrt{A^2 - x_2^2} = 5\sqrt{2}\sqrt{0,16 - 0,01}\frac{m}{s} = \sqrt{50}\sqrt{0,15}\frac{m}{s} \Rightarrow |\upsilon_2| = \sqrt{7,5}\frac{m}{s}$

Θέμα Δ

Δ1. Ο τροχός εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση και εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$ δέχεται το βάρος του $m\vec{g}$, την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το οριζόντιο επίπεδο και τη στατική τριβή $\vec{T}_S$ έστω με φορά προς τα αριστερά (δε χρειάζεται η στατική τριβή να αιτιολογήσει την κίνηση). Εφαρμόζοντας τους θεμελιώδης νόμους έχουμε:



ΘΝΜ : $\Sigma F_x = ma_{cm} \Rightarrow F - T_S = ma_{cm}$ (1)

ΘΝΣ: $\Sigma\tau = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow Fr + T_S R = I\dfrac{a_{cm}}{R} \Rightarrow F\dfrac{r}{R} + T_S = I\dfrac{a_{cm}}{R^2}$ (2)

$$(1)+(2) \Rightarrow F - T_S + F\frac{r}{R} + T_S = ma_{cm} + I\frac{a_{cm}}{R^2} \Rightarrow F + 0,4F = \left(m + \frac{I}{R^2}\right)a_{cm} \Rightarrow$$

$$1,4F = \left(m + \frac{I}{R^2}\right)a_{cm} \Rightarrow\Rightarrow \boxed{a_{cm} = 4\frac{m}{s^2}}$$

Δ2. Το άκρο Α του νήματος έχει επιτάχυνση:

$$\vec{\alpha}_A = \vec{\alpha}_{cm} + \vec{\alpha}_{\varepsilon(r)} \Rightarrow \alpha_A = \alpha_{cm} + \alpha_{\varepsilon(r)} = \alpha_{cm} + r\alpha_{\gamma\omega\nu} = \alpha_{cm} + 0,4R\alpha_{\gamma\omega\nu} = \alpha_{cm} + 0,4\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\alpha_A = 1,4\alpha_{cm} = 5,6\frac{m}{s^2}.$$

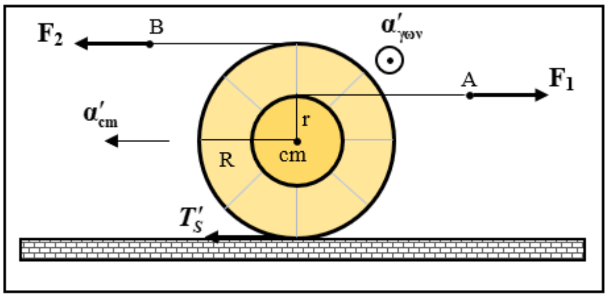
Η ταχύτητα του άκρου Α του νήματος θα είναι: $\upsilon_A = \alpha_A t \Rightarrow \upsilon_A = 11,2\dfrac{m}{s}$

Δ3. Η οριακή τιμή της στατικής τριβής είναι: $T_{S\max} = \mu_S N$ όπου $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg$, άρα $T_{S\max} = \mu_S mg$. Η στατική τριβή έχει μέτρο που μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση $(1) \Rightarrow 20N - T_S = 16N \Rightarrow T_S = 4N$

Για να εκτελεί το στερεό κύλιση χωρίς ολίσθηση πρέπει:

$$T_S \le T_{S\max} \Rightarrow T_S \le \mu_S mg \Rightarrow \mu_S \ge \frac{T_S}{mg} \Rightarrow \mu_S \ge \frac{4}{40} \rightarrow \boxed{\mu_{S\min} = 0,1}$$

Δ4. Το στερεό λόγω του ζεύγους στρέφεται αριστερόστροφα. Επειδή εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση θα μεταφέρεται και προς τα αριστερά. Η στατική τριβή έχει φορά προς τα αριστερά για να δικαιολογεί τη μεταφορική κίνηση.



ΘΝΜ : $\Sigma F'_x = ma'_{cm} \Rightarrow F_2 + T'_S - F_1 = ma'_{cm} \Rightarrow T'_S = ma'_{cm}$ (3)

ΘΝΣ: $\Sigma\tau' = Ia'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_{\zeta\varepsilon\acute{\upsilon}\gamma o\upsilon\varsigma} - \tau_{T'_S} = Ia'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F_2R - F_1r - T'_SR = Ia'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F'(R-r) - T'_SR = I\dfrac{a'_{cm}}{R} \Rightarrow$

$$0,6F'R - T'_SR = I\frac{a'_{cm}}{R} \Rightarrow 0,6F' - T'_S = I\frac{a'_{cm}}{R^2} (4)$$

$$(3)+(4) \Rightarrow T'_S + 0,6F' - T'_S = ma'_{cm} + I\frac{a'_{cm}}{R^2} \Rightarrow 0,6F' = \left(m + \frac{I}{R^2}\right)a'_{cm} \Rightarrow a'_{cm} = 1,2\frac{m}{s^2}$$