

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 13 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2019

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών και να γίνει η απόδειξη. **(2+5μ)**

B) 1. Πότε μία συνάρτηση καλείται ένα προς ένα ;

2. Πότε μία συνάρτηση καλείται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$; **(2+2μ)**

Γ) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

<< Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της τότε θα ισχύει $f'(x) > 0$ >>

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α αν είναι αληθής , ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήστε την απάντησή σας στο ερώτημα α). **(1+3μ)**

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$.

2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει κατακόρυφη ασύμπτωτη για $x = x_0$ τότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ ή } +\infty .$$

3. Αν μία συνάρτηση f είναι 1-1 τότε τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία το πολύ μία φορά.

4. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ τότε παρουσιάζει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

5. Αν για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ τότε το ολοκλήρωμα εκφράζει το εμβαδό του

χωρίου που περικλείεται μεταξύ C_f , x' και των κατακόρυφων ευθειών $x=a$ και $x=b$.

(10μ)



1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (5μ)
2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} . (7μ)
3. Αν $f^{-1}(x) = \ln \frac{x+1}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$ τότε να μελετήσετε την f^{-1} ως προς μονοτονία-ακρότητα και κυρτότητα-σημεία καμψής. (3+3μ)
4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f^{-1} και με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} . (2+5μ)

ΘΕΜΑ 3^ο

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $(f(x) - \ln x) \cdot (f(x) + \ln x - 2x) = 0$ για $x > 0$
- $(x - e) \cdot f(x) - x \ln x + x \geq 0$ για $x > 0$



1. Να δείξετε ότι η $x = e^2$ αποτελεί μοναδική λύση της εξίσωσης $x \ln x = x + e^2$ για $x > 0$. (3μ)
2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$. (7μ)
3. A) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το σημείο $A(-e^2, 0)$. (3μ)
B) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f του οριζόντιου άξονα $x'x$ και της ευθείας $y = e^{-2} \cdot x + 1$. (6μ)
4. Να βρείτε την ευθεία $x = a$, η οποία χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος σε δύο ισεμβαδικά χωρία. (6μ)

ΘΕΜΑ 4^ο

Για την συνεχή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + 3 = 9x^2 \ln x + \int_1^e (f(x) - 6x^2) dx$

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 9x^2 \ln x$ και να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία. (5+2μ)



1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



2. Α) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f του οριζόντιου άξονα $x'x$ και των κατακόρυφων ευθειών $x = 1$ και $x = e$ (3μ)
- Β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(1, e)$ υπάρχει τουλάχιστον μία εφαπτόμενη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 27x + 77$. (4μ)
3. Αν $F(x)$ παράγουσα της $f(x)$ για $x > 0$ με $F(1) = -1$ να βρείτε την τιμή $F(e)$ και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) \cdot (F(x) - 2e^3) + f(x) \cdot f'(x) = 27f(x)$ παρουσιάζει μία τουλάχιστον ρίζα για $x > 1$ (2+4μ)
4. Να αποδείξετε ότι $\int_{e^2}^{e^3} f^3(x) dx > \int_1^e e^2 \cdot f^3(x) dx$. (5μ)



En Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

...ΕΥΧΟΜΕΘΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑ...

