**Θέμα Α**

Α1 – γ , Α2 – γ , Α3 – β , Α4 – γ , Α5 α – Σ , β – Σ , γ – Λ , δ – Λ , ε – Λ

**Θέμα Β**

**Β1. Ι. Σωστή απάντηση είναι η (β).**

Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται τον ήχο με συχνότητα κατά 20% μεγαλύτερη από τη συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή οπότε $f_A = f_S + 20\% f_S \Rightarrow f_A = 1{,}2 f_S \Rightarrow \dfrac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_S} f_S = 1{,}2 f_S \Rightarrow$

$$\upsilon+\upsilon_A = 1{,}2\upsilon - 1{,}2\upsilon_S \Rightarrow \upsilon+\upsilon_A = 1{,}2\upsilon - 1{,}2\frac{\upsilon_A}{2} \Rightarrow 1{,}6\upsilon_A = 0{,}2\upsilon \Rightarrow \upsilon_A = \frac{\upsilon}{8}$$

**ΙΙ. Σωστή απάντηση είναι η (α).**

Η ταχύτητα της πηγής είναι $\upsilon_S = \dfrac{\upsilon_A}{2} = \dfrac{\upsilon}{16}$.

Το μήκος κύματος $\lambda_A$ που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι:

$$\lambda_A = \lambda - x_S = \lambda - \frac{\upsilon_S}{f_S} = \lambda - \frac{1}{16}\frac{\upsilon}{f_S} = \lambda - \frac{\lambda}{16} \Rightarrow \lambda_A = \frac{15}{16}\lambda$$

**Β2. Σωστή απάντηση είναι η (α).**

Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς της απομάκρυνσης της ιδιόμορφης ταλάντωσης είναι:

$$\Delta t = \frac{1}{200}s = \frac{T}{2} \Rightarrow T = \frac{1}{100}s \Rightarrow \frac{1}{\bar{f}} = \frac{1}{100}s \Rightarrow \bar{f} = 100Hz \Rightarrow \frac{f_1+f_2}{2} = 100Hz \Rightarrow f_1+f_2 = 200Hz\,(1).$$

Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους είναι:

$$\Delta t' = 0{,}25\,s = T_\delta \Rightarrow \frac{1}{f_1-f_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow f_1 - f_2 = 4Hz\ (2).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη $(1)+(2)$ έχουμε: $2f_1 = 204Hz \Rightarrow f_1 = 102Hz$ οπότε $f_2 = 98Hz$

**Β3. Σωστή απάντηση είναι η (γ).**

Η κινητική τη σανίδας είναι: $K_{σανίδας} = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2$

Η κινητική του κυλίνδρου είναι: $K_{ολ,κυλ} = K_{μτφ} + K_{στρφ} = \dfrac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \dfrac{1}{2}I\omega^2 = \dfrac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}mR^2\omega^2 \Rightarrow$

$$K_{ολ,κυλ} = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}m\upsilon_{cm}^2 \Rightarrow K_{ολ,κυλ} = \frac{3}{4}m\upsilon_{cm}^2$$

Ο κύλινδρος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση και η σανίδα δεν ολισθαίνει πάνω στον κύλινδρο οπότε για το σημείο επαφής κυλίνδρου σανίδας ισχύει $\upsilon = 2\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \dfrac{\upsilon}{2}$ οπότε

$$K_{ολ,κυλ} = \frac{3}{4}m\frac{\upsilon^2}{4} \Rightarrow K_{ολ,κυλ} = \frac{3}{16}m\upsilon^2$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων είναι: $K_{ολ} = K_{σανίδας} + K_{ολ,κυλ}$

$$K_{ολ} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{3}{16}m\upsilon^2 \Rightarrow K_{ολ} = \frac{11}{16}m\upsilon^2$$

**Θέμα Γ**

**Γ1.** Η πίεση του νερού στα σημεία 1 και 2 είναι:

$$p_1 = p_{atm} + \rho g h_1 = \left(10^5 + 10^3\cdot 10\cdot 0{,}6\right)\frac{N}{m^2} \Rightarrow p_1 = 1{,}06\cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}$$

$$p_2 = p_{atm} + \rho g h_2 = \left(10^5 + 10^3\cdot 10\cdot 0{,}2\right)\frac{N}{m^2} \Rightarrow p_2 = 1{,}02\cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}$$

**Γ2.** Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε: $A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow 3A_2\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow 3\upsilon_1 = \upsilon_2$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\cdot 9\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \Rightarrow p_1 - p_2 = 4\rho\upsilon_1^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1^2 = \frac{p_1 - p_2}{4\rho} \Rightarrow \upsilon_1^2 = \frac{1{,}06\cdot 10^5 - 1{,}02\cdot 10^5}{4\cdot 10^3} \Rightarrow \upsilon_1 = 1\frac{m}{s}$$

Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του νερού στη διατομή 1 είναι: $\frac{K_1}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \Rightarrow \frac{K_1}{\Delta V} = 500\frac{J}{m^3}$

**Γ3.** Η ισχύς λόγω διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων 1 και 2 είναι:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{(p_1 - p_2)\Delta V}{\Delta t} = (p_1 - p_2)\frac{\Delta V}{\Delta t} = (p_1 - p_2)\Pi = (p_1 - p_2)A_1\upsilon_1 \Rightarrow P = 4{,}8W$$

**Γ4.** Όταν το ύψος του νερού στον κατακόρυφο σωλήνα Γ μηδενίζεται η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική, δηλαδή $h_2' = 0 \rightarrow p_2' = p_{atm}$.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2:

$$p_1' + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1'^2 = p_2' + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2'^2 \Rightarrow p_1' - p_2' = \frac{1}{2}\rho\cdot 9\upsilon_1'^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_1'^2 \Rightarrow p_1' - p_2' = 4\rho\upsilon_1'^2 \Rightarrow \upsilon_1'^2 = \frac{p_1' - p_2'}{4\rho} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1'^2 = \frac{p_{atm} + \rho g h_1' - p_{atm}}{4\rho} \Rightarrow \upsilon_1'^2 = \frac{\rho g h_1'}{4\rho} = 0{,}36 \Rightarrow \upsilon_1' = 0{,}6\frac{m}{s}$$

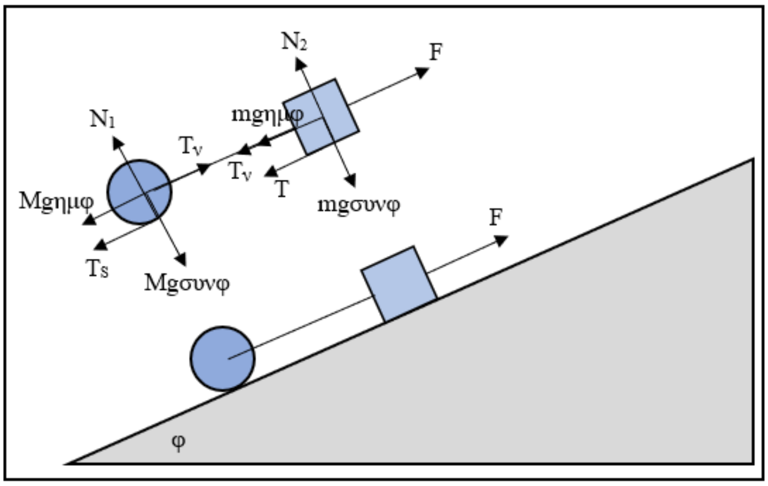
Το ποσοστό μεταβολής της αρχικής παροχής του σωλήνα είναι:

$$\lambda = \frac{\Pi' - \Pi}{\Pi}100\% = \left(\frac{\Pi'}{\Pi} - 1\right)100\% = \left(\frac{A_1\upsilon_1'}{A_1\upsilon_1} - 1\right)100\% = \left(\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_1} - 1\right)100\% \Rightarrow \lambda = -40\%$$

## Θέμα Δ

**Δ1.** Ο κύβος δέχεται το βάρος του $m\vec{g}$, τη δύναμη $\vec{F}$, την κάθετη δύναμη $\vec{N}_2$ και την τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ από το κεκλιμένο επίπεδο και την τάση του νήματος $\vec{T}_\nu$.

Ο δίσκος δέχεται το βάρος του $M\vec{g}$, την κάθετη δύναμη $\vec{N}_1$ και τη στατική τριβή $\vec{T}_S$ από το κεκλιμένο επίπεδο και την τάση του νήματος $\vec{T}_\nu$.




Για τον δίσκο:

ΘΝΜ $\Sigma F_{1x} = M\alpha_{cm} \Rightarrow T_\nu - T_S - Mg\eta\mu\varphi = M\alpha_{cm}$ (1)

ΘΝΣ $\Sigma\tau = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_S R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_S = \frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_S = \frac{1}{2}M\alpha_{cm}$ (2)

$$(1)+(2) \Rightarrow T_\nu - T_S - Mg\eta\mu\varphi + T_S = M\alpha_{cm} + \frac{1}{2}M\alpha_{cm} \Rightarrow T_\nu - Mg\eta\mu\varphi = \frac{3}{2}M\alpha_{cm} \quad (3)$$

Για τον κύβο: ΘΝΜ

$$\Sigma F_{2x} = m\alpha \Rightarrow F - T - T_\nu - mg\eta\mu\varphi = m\alpha \xrightarrow{\alpha=\alpha_{cm}} F - T - T_\nu - mg\eta\mu\varphi = m\alpha_{cm} \quad (4)$$

$$(3)+(4) \Rightarrow T_\nu - Mg\eta\mu\varphi + F - T - T_\nu - mg\eta\mu\varphi = \frac{3}{2}M\alpha_{cm} + m\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$F - T - Mg\eta\mu\varphi - mg\eta\mu\varphi = \left(\frac{3}{2}M + m\right)\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = 1\frac{m}{s^2} \quad \text{όπου } T = \mu N_2 = \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi = 1{,}6N$$

**Δ2.** Από $(2) \Rightarrow T_S = 1N$ και $T_{S\,max} = \mu_S N_1 = \mu_S Mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow T_{S\,max} = 3{,}2N$

Άρα $T_S < T_{S\,max}$ οπότε εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση.

**Δ3. α)** Ισχύει $\theta = 2\pi N = 10rad$ . Ο δίσκος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση οπότε έχει διανύσει απόσταση $x_{cm} = R\theta = 2m$ . Η ταχύτητά του εκείνη τη στιγμή υπολογίζεται ως εξής:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t \Rightarrow t = \frac{\upsilon_{cm}}{\alpha_{cm}} \text{ και } x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2 = \frac{1}{2}\alpha_{cm}\frac{\upsilon_{cm}^2}{\alpha_{cm}^2} \Rightarrow x_{cm} = \frac{\upsilon_{cm}^2}{2\alpha_{cm}} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \sqrt{2x_{cm}\alpha_{cm}} = 2\frac{m}{s}$$

Η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι:

$$K_{o\lambda(M)} = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}M\upsilon_{cm}^2 \Rightarrow K_{o\lambda(M)} = \frac{3}{4}M\upsilon_{cm}^2 = 6J$$

Η κινητική ενέργεια του κύβου είναι: $K_{(m)} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \xrightarrow{\upsilon = \upsilon_{cm}} K_{(m)} = 2J$

Οπότε η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι: $K_{o\lambda} = K_{o\lambda(M)} + K_{(m)} \Rightarrow K_{o\lambda} = 8J$

**β)** Η τάση του νήματος έχει μέτρο που υπολογίζεται από τη σχέση $(3)$ δηλαδή :

$$T_\nu = Mg\eta\mu\varphi + \frac{3}{2}M\alpha_{cm} = 15N .$$

Ο ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του δίσκου είναι:

$$\frac{dE_{\text{ΜΗΧ}(M)}}{dt} = \frac{dK_{o\lambda(M)}}{dt} + \frac{dU_{\beta\alpha\rho(M)}}{dt} = \frac{dK_{\mu\tau\varphi(M)}}{dt} + \frac{dK_{\sigma\tau\rho\varphi(M)}}{dt} + \frac{dU_{\beta\alpha\rho(M)}}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dE_{\text{ΜΗΧ}(M)}}{dt} = \frac{\Sigma F_{1x}\cdot dx_{cm}}{dt} + \frac{\Sigma\tau\cdot d\theta}{dt} - \frac{dW_{Mg\eta\mu\varphi}}{dt} = \Sigma F_{1x}\cdot\upsilon_{cm} + \Sigma\tau\cdot\omega - \frac{-Mg\eta\mu\varphi\cdot dx_{cm}}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dE_{\text{ΜΗΧ}(M)}}{dt} = (T_\nu - T_S - Mg\eta\mu\varphi)\cdot\upsilon_{cm} + T_S R\cdot\omega + Mg\eta\mu\varphi\cdot\upsilon_{cm} \Rightarrow$$

$$\frac{dE_{\text{ΜΗΧ}(M)}}{dt} = T_\nu\cdot\upsilon_{cm} - T_S\cdot\upsilon_{cm} - Mg\eta\mu\varphi\cdot\upsilon_{cm} + T_S\cdot\upsilon_{cm} + Mg\eta\mu\varphi\cdot\upsilon_{cm} \Rightarrow \frac{dE_{\text{ΜΗΧ}(M)}}{dt} = T_\nu\cdot\upsilon_{cm} = 30\frac{J}{s}$$

ή $$\frac{dE_{\text{ΜΗΧ}(M)}}{dt} = \Sigma F_{1x}\cdot\upsilon_{cm} + \Sigma\tau\cdot\omega + Mg\eta\mu\varphi\cdot\upsilon_{cm} = M\alpha_{cm}\cdot\upsilon_{cm} + I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\omega + Mg\eta\mu\varphi\cdot\upsilon_{cm} = 30\frac{J}{s}$$

**Δ4.** Μετά το κόψιμο του νήματος για την επιτάχυνση του κύβου έχουμε:

$$\Sigma F_{2x} = m\alpha \Rightarrow F - T - mg\eta\mu\varphi = m\alpha' \Rightarrow 23{,}6 - 6 - 1{,}6 = \alpha' \Rightarrow \alpha' = 16\frac{m}{s^2}$$

Εξετάζουμε αν ο δίσκος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση.

ΘΝΜ $\Sigma F'_{1x} = M\alpha'_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - T'_S = M\alpha'_{cm}$ $(5)$

ΘΝΣ $\Sigma\tau' = I_{cm}\alpha'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T'_S R = \frac{1}{2}MR^2\alpha'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T'_S = \frac{1}{2}MR\alpha'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T'_S = \frac{1}{2}M\alpha'_{cm} \Rightarrow 2T'_S = M\alpha'_{cm}$ $(6)$

$$(5)+(6) \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - T'_S = 2T'_S \Rightarrow T'_S = \frac{Mg\eta\mu\varphi}{3} = 4N$$

Όμως $T_{S\,max} = \mu_S N_1 = \mu_S Mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow T_{S\,max} = 3{,}2N < T'_S = 4N$ άρα εκτελεί κύλιση με ολίσθηση.

Οπότε ο δίσκος δέχεται τριβή ολίσθησης $T_1 = T_{S\,max} = \mu N_1 = \mu Mg\sigma\upsilon\nu\varphi = 3{,}2N$ .

Για την επιτάχυνση του κέντρου μάζας έχουμε:

$$\Sigma F'_{1x} = M\alpha'_{cm(1)} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi + T_1 = M\alpha'_{cm(1)} \Rightarrow 12 + 3{,}2 = 2\alpha'_{cm(1)} \Rightarrow \alpha'_{cm(1)} = 7{,}6\frac{m}{s^2}$$

Για τη γωνιακή επιτάχυνση έχουμε:

$$\Sigma\tau' = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} \Rightarrow T_1 R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} \Rightarrow 3{,}2 = \frac{1}{2}2\cdot 0{,}2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = 16\frac{rad}{s^2}$$