ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (13 - 4 - 2019)

## 1ο ΘΕΜΑ

Γ) α) ΨΕΥΔΗΣ, β) Η $f(x)=x^3$ είναι γν. αύξουσα διότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

ενώ $f'(x) = 3x^2 \geq 0$

Δ) 1) ΛΑΘΟΣ, 2) ΛΑΘΟΣ, 3) ΣΩΣΤΟ, 4) ΛΑΘΟΣ, 5) ΛΑΘΟΣ

## 2ο ΘΕΜΑ

1) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

Άρα η $f \nearrow$, $A = (-\infty, +\infty) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f \nearrow} f(A) = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = (-1, 1)$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1$ ( $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ αφού $e > 1$ )
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = 1$

2) Αφού $f \nearrow$ είναι "1-1" οπότε αντιστρέφεται

Έστω $f(x) = y \Leftrightarrow y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow y \cdot e^x + y = e^x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x(y - 1) = -1 - y \overset{y \neq 1}{\Longleftrightarrow} e^x = \frac{y+1}{1-y} \Leftrightarrow x = \ln \frac{y+1}{1-y}$ (1)

$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y) = \ln \frac{y+1}{1-y}$ οπότε $f^{-1}(x) = \ln \frac{x+1}{1-x}$, $A_{f^{-1}} = f(A) = (-1, 1)$

3) $(f^{-1})'(x) = \frac{1-x}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{1-x}\right)' = \frac{\cancel{1-x}}{x+1} \cdot \frac{1-x+(x+1)}{(1-x)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} > 0$

αφού $x \in (-1, 1)$ οπότε $f^{-1} \nearrow$ και συνεχής ως πράξεις συνεχών στο $(-1, 1)$

άρα δεν έχει ακρότατα

$(f^{-1})''(x) = \frac{-2}{(1-x^2)^2} \cdot (1-x^2)' = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\frown$ | | $\smile$ |

Οπότε η $f^{-1}$ παρουσιάζει σημείο καμπής το $(0, f^{-1}(0))$ ή $(0,0)$ και είναι κυρτή στο $[0,1)$ και κοίλη στο $(-1,0]$

Δ) Αφού $A_f = (-1,1)$ δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$

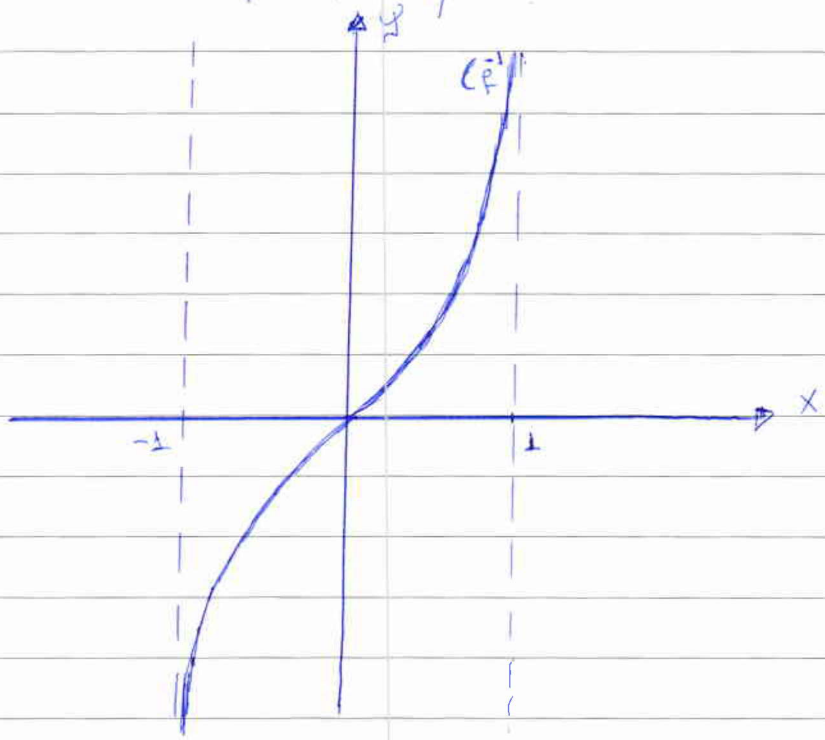
Για κατακόρυφες ασύμπτωτες:

• $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \ln \frac{x+1}{1-x} \xrightarrow[\text{Για } x \to -1^+ \text{ το } u \to 0^+]{u = \frac{x+1}{1-x}} \lim_{u \to 0^+} \ln u = -\infty$

Άρα η $x=-1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

• $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln \frac{x+1}{1-x} \xrightarrow[\text{Για } x \to 1^- \text{ το } u \to +\infty]{u = \frac{x+1}{1-x}} \lim_{u \to +\infty} \ln u = +\infty$

Άρα η $x=1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.



## ΘΕΜΑ 9ο

1) Η ζητούμενη εξίσωση: $x \cdot \ln x = x + e^2 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln x = 1 + \frac{e^2}{x}$

έστω $f(x) = \ln x - 1 - \frac{e^2}{x}$, $f(e^2) = 0$

$\hookrightarrow x>0$

$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{e^2}{x^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow$ άρα η $x = e^2$ μοναδική ρίζα.

2) $(f(x) - \ln x)(f(x) + \ln x - 2x) = 0$

$\Leftrightarrow f^2(x) - \ln^2 x - 2x f(x) + 2x \ln x = 0$

$\Leftrightarrow f^2(x) - 2x f(x) = \ln^2 x - 2x \ln x$

$\overset{+x^2}{\Longleftrightarrow} f^2(x) - 2x f(x) + x^2 = \ln^2 x - 2x \ln x + x^2$

$\Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = (\ln x - x)^2 \Leftrightarrow |f(x) - x| = |\ln x - x|$

Ισχύει $x - \ln x \geq 1 \Leftrightarrow \ln x - x \leq -1$ οπότε η σχέση γίνεται

$\boxed{|f(x) - x| = x - \ln x}$ (*)

έστω $g(x) = f(x) - x$, η $g(x)$ συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

Αν $g(x) = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} 0 = x - \ln x$ Άτοπο

Άρα $g(x) \neq 0$ και συνεχής οπότε έχει σταθερό πρόσημο.

Ακόμα από υπόθεση ισχύει ότι $(x-e)f(x) - x\ln x + x \geq 0$, $x>0$

Αν $h(x) = (x-e)f(x) - x\ln x + x$ και $h(x) \geq 0$ με $h(e) = 0$

οπότε $h(x) \geq h(e)$ δηλαδή το $h(e)$ ελάχιστο της $h$ όπου $x = e$

εσωτερικό σημείο του $A_h = (0, +\infty)$ στο οποίο είναι παραγωγίσιμη

οπότε από Θ. Fermat $h'(e) = 0$

$h'(x) = f(x) + (x-e)f'(x) - \ln x - \cancel{x} + \cancel{x} \overset{x=e}{\Longrightarrow} f(e) - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(e) = 1}$

Έτσι για την $g(x)$ που έχει σταθερό πρόσημο ισχύει $g(e) = f(e) - e = 1 - e < 0$

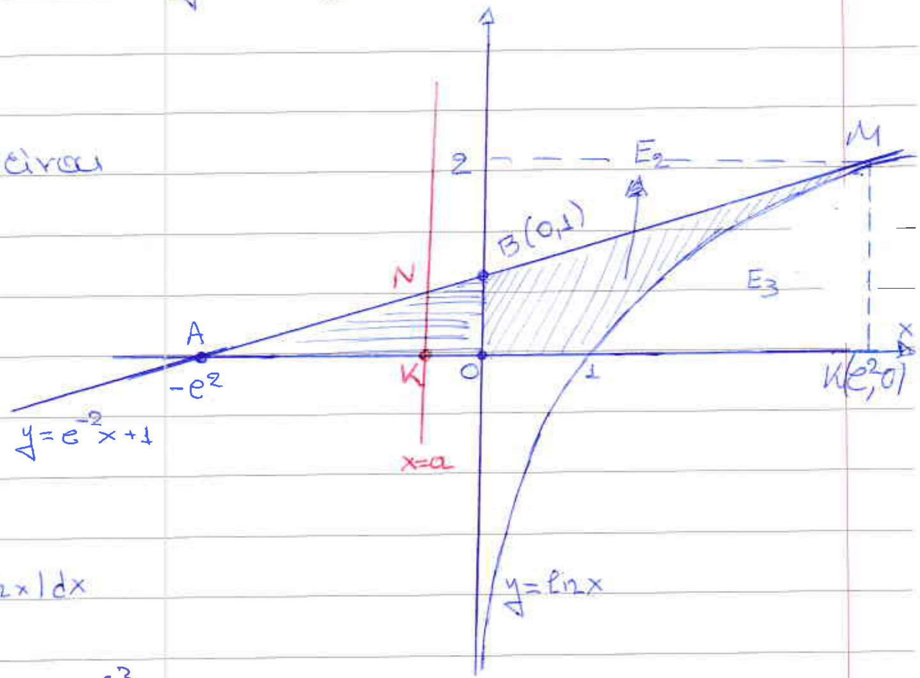
Άρα $g(x) < 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} x - f(x) = x - \ln x \Leftrightarrow f(x) = \ln x$, $x>0$

3) Α) έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής τότε η εξίσωση εφαπτομένης είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ το σημείο $A(-e^2,0)$ την επαληθεύει άρα $-f(x_0) = f'(x_0)(-e^2-x_0) \iff -\ln x_0 = \frac{1}{x_0}(-e^2-x_0) \iff$

$\iff x_0\ln x_0 = x_0 + e^2$ Απο το (1) παρουσιάζει μοναδική ρίζα για $x=e^2$.

Έτσι εφ: $y - f(e^2) = f'(e^2)(x-e^2) \iff y-2 = \frac{1}{e^2}(x-e^2)$

$\iff \boxed{y = e^{-2}\cdot x + 1}$




Β) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$E_{o\lambda} = (O\hat{A}B) + E_2$

• $(O\hat{A}B) = \frac{OA\cdot OB}{2} = \frac{e^2}{2}$

• $E_2 = (OBMK) - E_3$

$= \frac{(β+B)\cdot υ}{2} - \int_1^{e^2} |\ln x|\, dx$

$= \frac{(1+2)\cdot e^2}{2} - [x\ln x - x]_1^{e^2}$

$= \frac{3}{2}e^2 - 2e^2 + e^2 - 1 = \frac{e^2}{2} - 1 = \frac{e^2-2}{2}$

Οπότε $E_{o\lambda} = \frac{e^2}{2} + \frac{e^2-2}{2} = e^2 - 1$

4) Ισχύει ότι $(O\hat{A}B) = e^2/2$ και $E_{o\lambda} = e^2 - 1$ οπότε $(O\hat{A}B) > \frac{E_{o\lambda}}{2}$

Συνεπώς η κατακόρυφη ευθεία που θα χωρίζει το αρχικό χωρίο σε 2 ισεμβαδικά χωρία είναι "αριστερά" του $y'y$, δηλαδή είναι η $x=α$ με $α<0$.

Άρα $(A\hat{K}N) = E_{o\lambda}/2 \iff \int_{-e^2}^{α} |e^{-2}x+1|\, dx = \frac{e^2-1}{2} \iff$

$[e^{-2}\cdot \frac{x^2}{2} + x]_{-e^2}^{α} = \frac{e^2-1}{2} \iff e^{-2}\cdot\frac{α^2}{2} + α - \frac{e^2}{2} + e^2 = \frac{e^2-1}{2} \overset{\cdot 2}{\iff}$

$\iff e^{-2}\cdot α^2 + 2α - \cancel{e^2} + \cancel{2e^2} = \cancel{e^2} - 1 \iff \boxed{e^{-2}\cdot α^2 + 2α + 1 = 0}$

$Δ = 4 - 4e^{-2} = 4(1-e^{-2}) > 0$, $α = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1-e^{-2}}}{2e^{-2}} = -e^2 \pm e^2\sqrt{1-e^{-2}}$

→ $\boxed{α = -e^2 + e^2\sqrt{1-e^{-2}}}$ Δεκτή

→ $α = -e^2 - e^2\sqrt{1-e^{-2}} < -e^2$ Απορ.

# 4ο ΘΕΜΑ

1) Ισχύει $f(x)+3 = 9x^2 \ln x + \int_1^e (f(x)-6x^2)\,dx$ (*)

Έστω $\int_1^e (f(x)-6x^2)\,dx = \kappa \in \mathbb{R}$ Τότε:

$$\kappa = \int_1^e (f(x)-6x^2)\,dx \overset{(*)}{=} \int_1^e (9x^2\ln x + \kappa - 3 - 6x^2)\,dx =$$

$$= \int_1^e 3(x^3)'\ln x\,dx + [\kappa x - 3x - 2x^3]_1^e =$$

$$= [3x^3 \ln x]_1^e - \int_1^e 3x^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx + \kappa e - 3e - 2e^3 - \kappa + 3 + 2$$

$$= 3e^3 - 0 - [x^3]_1^e + \kappa e - 3e - 2e^3 - \kappa + 5$$

$$= \cancel{3e^3} - \cancel{e^3} + 1 + \kappa e - 3e - \cancel{2e^3} - \kappa + 5$$

$$\Leftrightarrow \kappa = \kappa e - \kappa + 6 - 3e \Leftrightarrow 2\kappa - \kappa e = 6 - 3e \Leftrightarrow \kappa(\cancel{2-e}) = 3(\cancel{2-e})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\kappa = 3}$$

Η (*) $\Rightarrow f(x) + \cancel{3} = 9x^2\ln x + \cancel{3} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 9x^2 \ln x}$

2) Α) $E = \int_1^e |f(x)|\,dx \xrightarrow[f(x)\geq 0 \text{ στο } [1,e]]{f(x)=9x^2\ln x} \int_1^e f(x)\,dx$

Από (*) $\Rightarrow \cancel{f(x)} + 3 = \cancel{9x^2\ln x} + \int_1^e (f(x)-6x^2)\,dx$

$$\Leftrightarrow 3 = \int_1^e f(x)\,dx - [2x^3]_1^e \Leftrightarrow 3 = E - 2e^3 + 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E = 2e^3 + 1}$$

$f'(x) = 18x\ln x + 9x =$
$= 9x(2\ln x + 1)$

| $x$ | $0$ | | $e^{-1/2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Η $f \downarrow$ στο $(0, e^{-1/2}]$ και $f \uparrow$ στο $[e^{-1/2}, +\infty)$

ολ. ελάχιστο $f(e^{-1/2}) = -\frac{9}{2e}$

Β) $\lambda_{\varepsilon\varphi} = f'(x_0)$

$f'(x) = 18x\ln x + 9x$

Αρκεί η εξίσωση $f'(x)=27$ να παρουσιάζει ρίζα στο $(1,e)$

Έστω $M(x) = f'(x) - 27 = 18x\ln x + 9x - 27$

Η $M(x)$ συνεχής στο $[1,e]$ ως πράξεις συνεχών

$M(1) = -18 < 0$,

$M(e) = 18e + 9e - 27 = 27(e-1) > 0$

Άρα $M(1)M(e) < 0$, από Θ. Bolzano υπάρχει τουλ. 1 $x_0 \in (1,e)$: $M(x_0)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{f'(x_0) = 27}$

3) Απο (2Α) $\Rightarrow E = 2e^3 + 1 \Leftrightarrow \int_1^e f(x)\,dx = 2e^3 + 1$

$\Leftrightarrow [F(x)]_1^e = 2e^3 + 1 \Leftrightarrow F(e) - F(1) = 2e^3 + 1$

$\Leftrightarrow F(e) + \cancel{1} = 2e^3 + \cancel{1} \Leftrightarrow \boxed{F(e) = 2e^3}$

Η ζητούμενη εξίσωση: $f''(x)\cdot(F(x) - 2e^3) + f(x)\cdot f'(x) = 27 f(x)$

$\Leftrightarrow f''(x)\cdot(F(x) - 2e^3) + f(x)\,(f'(x) - 27) = 0$

$\Leftrightarrow (f'(x) - 27)'\cdot(F(x) - 2e^3) + (F(x) - 2e^3)'\cdot(f'(x) - 27) = 0$

$\Leftrightarrow [(f'(x) - 27)\cdot(F(x) - 2e^3)]' = 0$

Έστω $N(x) = (f'(x) - 27)\cdot(F(x) - 2e^3)$, $x > 1$

Η $N(x)$ συνεχής στο $[x_0, e]$ ως πράξεις συνεχών

Η $N(x)$ παραγ/μη στο $(x_0, e)$ " " παραγ/μων

(Απο (2Β) $x_0 \in (1, e): f'(x_0) = 27$)

$N(x_0) = (\underbrace{f'(x_0) - 27}_{=0})(F(x_0) - 2e^3) = 0$

$N(e) = (f'(e) - 27)(\underbrace{F(e) - 2e^3}_{=0}) = 0$

Απο Θ Rolle υπάρχει 1 τουλ. $\xi \in (x_0, e): N'(\xi) = 0$ οπότε η ζητούμενη εξίσωση παρουσιάζει ρίζα.

4) Αρκεί $\int_{e^2}^{e^3} f^3(x)\,dx > \int_1^e e^2\cdot f^3(x)\,dx$

Έστω $G(x)$ παράγουσα της $f^3(x)$ τότε η ζητούμενη σχέση

$[G(x)]_{e^2}^{e^3} > e^2 [G(x)]_1^e \Leftrightarrow G(e^3) - G(e^2) > e^2 (G(e) - G(1))$

$\overset{:(e-1)}{\Longleftrightarrow} \dfrac{G(e^3) - G(e^2)}{e^3 - e^2} > \dfrac{G(e) - G(1)}{e - 1}$

Η $G(x)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για $x > 0$ οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ.

Απο ΘΜΤ στο $[1, e]$ για την $G(x)$ $\exists\, x_1 \in (1, e)$: $G'(x_1) = \dfrac{G(e) - G(1)}{e - 1}$

Απο ΘΜΤ στο $[e^2, e^3]$ για την $G(x)$ $\exists\, x_2 \in (e^2, e^3)$: $G'(x_2) = \dfrac{G(e^3) - G(e^2)}{e^3 - e^2}$

Άρα η ζητούμενη σχέση: $G'(x_2) > G'(x_1)$, όμως $G'(x) = f^3(x)$

έτσι $f^3(x_2) > f^3(x_1) \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1) \overset{\text{Για } x > e^{-1/2},\ f \nearrow}{\Longleftrightarrow} x_2 > x_1$ που ισχύει