Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ (26-1-2019)

ΘΕΜΑ Α

Α2. α) ΛΑΘΟΣ γ) ΛΑΘΟΣ
β) ΛΑΘΟΣ δ) ΣΩΣΤΟ

[4μ]

Α3. α) ΛΑΘΟΣ
β) Αντιπαράδειγμα: $f(x)=\begin{cases} 7, & x>0 \\ 44, & x<0 \end{cases}$ οπότε $f'(x)=0$ στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

και η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση.

[4μ]

Α4. α) ΣΩΣΤΟ, γ) ΛΑΘΟΣ, ε) ΣΩΣΤΟ
β) ΛΑΘΟΣ, δ) ΣΩΣΤΟ

[10μ]

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, $f'(x)=\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}<0$

[4μ] οπότε η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$ και στο $(-1,1)$ και στο $(1,+\infty)$

Β2. $f''(x)=\dfrac{-2x(x^2-1)^{\cancel{2}}-(-1-x^2)\cdot 2\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}=$

$$=\frac{-2x(x^2-1)+(x^2+1)\cdot 4x}{(x^2-1)^3}=2x\,\frac{2x^2+2-x^2+1}{(x^2-1)^3}$$

$$=2x\,\frac{x^2+3}{(x^2-1)^3}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f''		$-$	‖	$+$		$-$	‖	$+$	

[8μ]

Παρατηρήσεις

B3. Κατακόρυφες:

• $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Άρα η $\boxed{x=1}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

• $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

Άρα η $\boxed{x=-1}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Πλάγιες - Οριζόντιες:

Παρατηρούμε ότι: • $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Άρα η $\boxed{y=0}$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \dots = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

[6μ] Άρα η $\boxed{y=0}$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

B4. $I = \int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx = \int_2^3 \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2-1} dx$

$= \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \left[\ln|x^2-1| \right]_2^3 =$

[7μ] $= \frac{1}{2} (\ln 8 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

$$2f^3(x)+6f(x)=2x^3+6x+8 \overset{:2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\boxed{f^3(x)+3f(x)=x^3+3x+4} \quad (1)$$

Γ1. $(1) \overset{x=0}{\Longrightarrow} f^3(0)+3f(0)-4=0$

1	0	3	−4	1
	1	1	4	
1	1	4	$\boxed{0}$	

$$(f(0)-1)(f^2(0)+f(0)+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{f(0)=1} \\ \text{ή } f^2(0)+f(0)+4=0, \quad \Delta=1-16=-15<0 \text{ Αδύνατη.} \end{cases}$$

$$(1) \overset{x=-1}{\Longrightarrow} f^3(-1)+3f(-1)=0$$

$$\Leftrightarrow f(-1)\left(f^2(-1)+3\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{f(-1)=0} \\ \text{ή } f^2(-1)=-3 \text{ Αδύνατη} \end{cases}$$

[5μ]

Γ2. Από παραγώγιση της (1) ⟹

$$3f^2(x)\cdot f'(x)+3f'(x)=3x^2+3 \Leftrightarrow f'(x)\left(f^2(x)+1\right)=x^2+1$$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{x^2+1}{f^2(x)+1}>0$, η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε

[6μ] η $f \nearrow \mathbb{R}$.

Γ3 Η $f \nearrow$ και συνεχής: $A=(-\infty,+\infty) \longrightarrow f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

Από υπόθεση $f(A)=(-\infty,+\infty)$ ⟹

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3+3x+4} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f^3(x)+3f(x)} \xrightarrow[\substack{\text{Για } x\to+\infty \\ \text{το } u\to+\infty}]{u=f(x)} \lim_{u\to+\infty}\frac{u}{u^3+3u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{u^3}=0$$

Παρατηρήσεις

Γ4. $I = \int_0^1 \frac{(f^{-1})^3_{(x)} + 3f^{-1}_{(x)}}{(f^{-1})^2_{(x)} + 1} \cdot (x^2+1)\,dx$

Θέτουμε $x = f(u)$ τότε $dx = f'(u)\,du$

Αν $x = 1 \Leftrightarrow f(u) = 1 = f(0) \overset{f\,1-1}{\Longleftrightarrow} u = 0$

Αν $x = 0 \Leftrightarrow f(u) = 0 = f(-1) \overset{f\,1-1}{\Longleftrightarrow} u = -1$

Οπότε $I = \int_{-1}^{0} \frac{\left(f^{-1}(f(u))\right)^3 + 3\, f^{-1}(f(u))}{\left(f^{-1}(f(u))\right)^2 + 1} \cdot (f^2(u)+1) \cdot f'(u)\,du$

$= \int_{-1}^{0} \frac{u^3+3u}{\cancel{u^2+1}} \cdot \cancel{(f^2(u)+1)} \cdot \frac{\cancel{u^2+1}}{\cancel{f^2(u)+1}}\,du$

$= \int_{-1}^{0} (u^3+3u)\,du = \left[\frac{u^4}{4} + \frac{3u^2}{2}\right]_{-1}^{0} =$

[7μ] $= 0 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{7}{4}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $g(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$g'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow g \nearrow$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$

$g(1) = 0$ οπότε για $x > 0$ υπάρχει μοναδική ρίζα.

για $x < 0$: $e^{x-1} > 0$ και $-\frac{1}{x} > 0$ οπότε $g(x) > 0$

[6μ] Συνεπώς η εξίσωση παρουσιάζει μοναδική ρίζα: $x = 1$.

Δ2. $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$, $f'(x) = \frac{2e^x(e^x+1) - 2e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} \Leftrightarrow$

$f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ οπότε η $f \nearrow$ και αφού η f συνεχής στο

$\mathbb{R}$ ισχύει: $A = (-\infty, +\infty) \to f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0, 2)$

► $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x}{e^x+1} = \frac{0}{1} = 0$ $\left(\lim_{x\to-\infty} e^x = 0\right)$

► $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x+1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x} = 2$.

$f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$, $f''(x) = \frac{2e^x\cdot(e^x+1)^{\cancel{2}} - 2e^x\cdot 2\cancel{(e^x+1)}\cdot e^x}{(e^x+1)^{\cancel{4}\,3}}$

$= 2e^x \frac{e^x+1-2e^x}{(e^x+1)^3} =$

$= 2e^x \frac{1-e^x}{(e^x+1)^3}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

[6μ]

Δ_3. $\varepsilon: (e-1)x-(e+1)y+7(e+1)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{e-1}{e+1}x+7} \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{e-1}{e+1}$

Αρκεί $\varepsilon\varphi // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \boxed{f'(x_0) = \frac{e-1}{e+1}}$ (1)

Απο ΘΜΤ για την $f(x)$ στο $[0,1]$ $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } [0,1] \text{ ως πράξεις συνεχών} \\ f \text{ παρ/μη στο } (0,1) \;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\; \text{παρ/μων} \end{cases}$

υπάρχει $x_0 \in (0,1)$: $f'(x_0) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{2e}{e+1} - 1 = \frac{e-1}{e+1}$

Για την μοναδικότητα: Αρκεί η εξίσωση (1) να παρουσιάζει το πολύ μία ρίζα.

Έστω $K(x) = f'(x) - \frac{e-1}{e+1}$, $K'(x) = f''(x) < 0$ στο $(0,1)$

[4μ] οπότε η τιμή x_0 μοναδική στο $(0,1)$.

Δ_4. (α) $I(a) = \int_0^a |f(x)-2|dx \xrightarrow[f(x)<2]{f(A)=(0,2)} \int_0^a (2-f(x))\,dx =$

$= \int_0^a \left(2 - \frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx = \left[2x - 2\ln(e^x+1)\right]_0^a =$

[3μ] $= 2a - 2\ln(e^a+1) + 2\ln 2 = 2\left(a - \ln\frac{e^a+1}{2}\right)$

-6-

Παρατηρήσεις

(β)

$$\lim_{a\to+\infty} 2\left(a-\ln\frac{e^a+1}{2}\right)=\lim_{a\to+\infty} 2\left(\ln e^a-\ln\left(\frac{e^a+1}{2}\right)\right)$$

$$=\lim_{a\to+\infty} 2\cdot\ln\frac{e^a}{\frac{e^a+1}{2}}=\lim_{a\to+\infty} 2\ln\frac{2e^a}{e^a+1}=$$

$$=\lim_{a\to+\infty} 2\ln f(a) \xrightarrow[\substack{\text{Για } a\to+\infty \text{ το } x\to 2\\ \text{αφού } \lim_{a\to+\infty} f(a)=2}]{\text{έστω } f(a)=x} \lim_{x\to 2}(2\ln x)=\ln 4.$$

[3μ]

(γ)

$$\left.\begin{array}{l} I(a)=1-f^2(a)\\ \text{Απο το (β)} \Rightarrow I(a)=2\ln f(a)=\ln f^2(a) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\ln f^2(a)=1-f^2(a) \Leftrightarrow f^2(a)-1=-\ln f^2(a)$$

$$\Leftrightarrow f^2(a)-1=\ln\frac{1}{f^2(a)} \Leftrightarrow e^{f^2(a)-1}=e^{\ln\frac{1}{f^2(a)}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e^{f^2(a)-1}=\frac{1}{f^2(a)}} \quad (2)$$

όμως απο το Α1 η εξίσωση $e^{x-1}=\frac{1}{x}$ έχει μοναδική ρίζα $x=1$.

οπότε απο την (2) $\Rightarrow f^2(a)=1 \xLeftrightarrow{0<f(x)<2} f(a)=1$

[3μ] $\Leftrightarrow f(a)=f(0) \xLeftrightarrow{f\ 1-1} a=0$

Βερόπουλ

$\blacktriangleright$ Θέτουμε $M(x)=\ln x+x-1$, $x>0$, η οποία παρουσιάζει μοναδική ρίζα $x=1$ καθώς $M'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ και $M(1)=0$.