

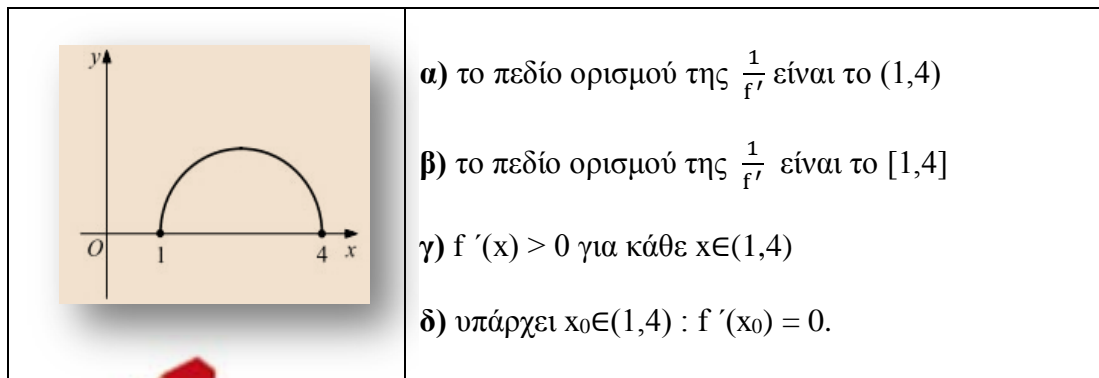
1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 26 /1/2019

Θέμα Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .
- A2.** Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ;



- A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

« Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του A , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το σύνολο A »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A** αν είναι αληθής , ή το γράμμα **Ψ** , αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

β) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



γ) Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) \neq 0$ τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

δ) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ε) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Μονάδες : 7 – 4 – 4 – 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$.

B1. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης f .

B2. Να βρείτε το πρόσημο της f'' .

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_2^3 f(x)dx$.



Μονάδες : 4 – 8 – 6 – 7

Θέμα Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 8, \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να βρείτε το $f(0)$ και το $f(-1)$.

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημο της.

Γ3. Αν επιπλέον ισχύει ότι η f έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} τότε να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3 + 3x + 4}.$$

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{(f^{-1})^3(x) + 3f^{-1}(x)}{(f^{-1})^2(x) + 1} \cdot (x^2 + 1) dx$ όταν είναι

γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής συνάρτηση.

Μονάδες : 5 – 6 – 7 – 7

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



Θέμα Δ

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$.

Δ1. Να λυθεί η εξίσωση $e^{x-1} = \frac{1}{x}$ για $x \neq 0$.

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πρόσημο της f'' .

Δ3. Να αποδειχθεί ότι στο διάστημα $(0,1)$ υπάρχει ακριβώς μία εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $(e-1)x - (e+1)y + 7(e+1) = 0$.

Δ4. α) Να δείξετε ότι: $I(\alpha) = \int_0^\alpha |f(x) - 2| dx = 2 \cdot (\alpha - \ln \frac{e^\alpha + 1}{2})$, $\alpha \geq 0$.

β) Να βρείτε το όριο: $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha)$.

γ) Αν ισχύει $I(\alpha) = 1 - f^2(\alpha)$ να βρεθεί η τιμή του α .

Μονάδες : 6 – 6 – 4 – 9



En Dynamei
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ