Εν δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

29/02/2017

ΘΕΜΑ Α

4) i) Λ ii) Λ iii) Λ iv) Σ v) Σ

ΘΕΜΑ Β

1) $f(x)+xf'(x)= . \Leftrightarrow (xf(x))'=(\ln x)' \Leftrightarrow xf(x)=\ln x+c$

Για $x=1$: $f(1)=c \Leftrightarrow c=1$ άρα $xf(x)=\ln x+1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$

2) f παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x-1}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$, $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 0 \Leftrightarrow$

$\ln x\leq \ln 1 \Leftrightarrow x\leq 1$

x	0		1	
f'	‖	$+$	0	$-$
f	‖	↗		↘

$x\in(0,1)$ $f'(x)>0$ άρα $f\uparrow$ στο $(0,1]$

$x\in(1,+\infty)$ $f'(x)<0$ άρα $f\downarrow$ στο $[1,+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} x>1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1) \\ x<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1) \\ x=1 \Rightarrow f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\leq f(1)=1$$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 το 1.

3) $A_1=(0,1]$, $f\uparrow$ $f(A_1)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x), f(1)\right]=(-\infty,1]$

$\cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x+1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left[(\ln x+1)\frac{1}{x}\right]=-\infty\cdot(+\infty)=-\infty$

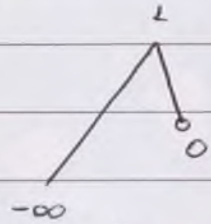
$A_2=[1,+\infty)$, $f\downarrow$ $f(A_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x), f(1)\right]=(0,1]$

$\cdot \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$

άρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,1]$

4) $ex=e^{\alpha x} \Leftrightarrow \ln ex = \ln e^{\alpha x} \Leftrightarrow \ln e+\ln x = \alpha x \Leftrightarrow$

$1+\ln x = \alpha x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{1+\ln x}{x}=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha$



- $\alpha<0$ 1 ρίζα
- $0<\alpha<1$: 2 ρίζες
- $\alpha=0$ 1 ρίζα
- $\alpha=1$: 1 ρίζα
- $\alpha>1$ αδύνατη

5) $E=\int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e \left|\frac{\ln x+1}{x}\right| dx$

$1\le x\le e \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(1)\ge f(x)\ge f(e) \Leftrightarrow 1\ge f(x)\ge \frac{2}{e}$ άρα $f(x)>0$

$E=\int_1^e \frac{\ln x+1}{x}dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx+\int_1^e\frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ τ.μ. γιατί

· $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx \;\overset{\ln x=u}{\underset{\frac{1}{x}dx=du}{=\!=\!=}}\; \int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

$x=1$: $u=0$
$x=e$: $u=1$

· $\int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^e = \ln e-\ln 1 = 1$

ΘΕΜΑ Γ

1) $f(x)\ge 2\alpha+2 \Leftrightarrow f(x)\ge f(1)$

1 εσωτερικό σημείο του A_f, η f παραγωγίσιμη στο 1, η f παρουσιάζει στο 1 ολικό ελάχιστο άρα από Θ.F. $f'(1)=0$

$f'(x)=\frac{2\ln x\,\frac{1}{x}\,x+\frac{\alpha}{x}x+4x^2-\ln^2x-\alpha\ln x-2x^2-2\alpha}{x^2}=$

$=\frac{2\ln x+\alpha+4x^2-\ln^2x-\alpha\ln x-2x^2-2\alpha}{x^2}$

$f'(1)=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+4-2-2\alpha}{1}=0 \Leftrightarrow 2-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=2.$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

2) Από (1) για $\alpha=2$ είναι $f'(x) = \dfrac{2\ln x + 2 + 4x^2 - \ln^2 x - 2\ln x - 2x^2 - 4}{x^2}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{-\ln^2 x + 2x^2 - 2}{x^2}$

$f''(x) = \dfrac{-2\ln x \frac{1}{x} x^2 + 4x \cdot x^2 - 2x(-\ln^2 x + 2x^2 - 2)}{x^2} =$

$= \dfrac{-2x\ln x + 4x^3 + 2x\ln^2 x - 4x^3 + 4x}{x^2} = \dfrac{2x\ln^2 x - 2x\ln x + 4x}{x^2} =$

$= \dfrac{2x(\ln^2 x - \ln x + 2)}{x^2} = \dfrac{2(\ln^2 x - \ln x + 2)}{x} > 0$, γιατί

• $x > 0$ • $\ln^2 x - \ln x + 2 \overset{\ln x = u}{=\!=} u^2 - u + 2 > 0$ γιατί $\Delta = -7 < 0$

άρα $f' \uparrow$

3) Είναι $f'(1) = 0$ κι $f' \uparrow$ άρα η $x=1$ μοναδική ρίζα της f'

$x > 1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \longrightarrow f \uparrow$ στο $[1, +\infty)$

$x < 1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \longrightarrow f \downarrow$ στο $(0, 1]$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln^2 x}{x^2} + 2 - \dfrac{2}{x^2}\right) = 2$ γιατί

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right) \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\frac{1}{x}}{1}\right) = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln^2 x + 2\ln x + 2x^2 + 4}{x} - 2x\right) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x + 2\ln x + 2x^2 + 4 - 2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x + 2\ln x + 4}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\dfrac{\ln^2 x}{x}}_{2DLH} + 2\underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{DLH} + \dfrac{4}{x}\right) = 0$ άρα $\boxed{y = 2x}$

Επομένως υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ τέτοια ώστε

$g(x_1) = 2x_1$ και $g(x_2) = 2x_2$ κ' έστω $x_1 < x_2$

$g(x) = x g'(x) \Leftrightarrow g(x) - x g'(x) = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} -\dfrac{x g'(x) - (x)' g(x)}{x^2} = 0$

$-\left(\dfrac{g(x)}{x}\right)' = 0$, Θεωρώ $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ στο $[x_1, x_2]$

h συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πηλίκο συνεχών

h παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) // παραγ.

$$\left.\begin{aligned} h(x_1) &= \frac{g(x_1)}{x_1} = \frac{2x_1}{x_1} = 2 \\ h(x_2) &= \frac{g(x_2)}{x_2} = \frac{2x_2}{x_2} = 2 \end{aligned}\right\} h(x_1) = h(x_2)$$

από Θ. Rolle ...

ΘΕΜΑ Δ

1) $f'(x)(x+1) = συνx - f(x) \Leftrightarrow f'(x)(x+1) + f(x) = συνx \Leftrightarrow$

$(f(x)(x+1))' = (ημx)' \Leftrightarrow f(x)(x+1) = ημx + c \xrightarrow{x=0} c = 0$

$f(x) = \dfrac{ημx}{x+1}$

2) $ημx \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{ημx}{x+1} \leq \dfrac{1}{x+1}$ με την ισότητα να μην ισχύει $\forall x \in (-1, 0)$

άρα $\displaystyle\int_α^0 \frac{ημx}{x+1} < \int_α^0 \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \int_α^0 f(x)dx < \left[\ln(x+1)\right]_α^0 \Leftrightarrow -\int f(x)dx < -\ln(α+1) \Leftrightarrow$

$\displaystyle\int_0^α f(x)dx > \ln(α+1)$

3) $\displaystyle\int_π^{π} f(x)dx > \int_π^{2π} f(x)dx \Leftrightarrow \int_π^{π} f(x)dx - \int_π^{2π} f(x)dx > 0 \Leftrightarrow$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

$$\int_{\lambda}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{2\pi}^{\lambda} f(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow \int_{2\pi}^{\pi} f(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow$$

$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx < 0$ το οποίο ισχύει αφού $\eta\mu x \le 0 \ \forall x \in [\pi, 2\pi]$

άρα κι $\frac{\eta\mu x}{x+1} = f(x) \le 0$ κι η ισότητα δεν ισχύει για κάθε x

4) $$\int_0^{\pi/2} f(x)(x+1)^3\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{x+1}(x+1)^3\,dx = \int_0^{\pi/2} \eta\mu x\,(x+1)^2\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} (-\sigma\upsilon\nu x)'(x+1)^2\,dx = \Big[-\sigma\upsilon\nu x\,(x+1)^2\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\sigma\upsilon\nu x\, 2(x+1)\,dx =$$

$$1 + 2\int_0^{\pi/2} (\eta\mu x)'(x+1)\,dx = 1 + 2\Big[\eta\mu x\,(x+1)\Big]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} \eta\mu x\,dx =$$

$$1 + 2\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) - 2\Big[-\sigma\upsilon\nu x\Big]_0^{\pi/2} = 1 + \pi + 2 + 2(0 - 1) = \pi + 1.$$