

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ : 29/1/2017

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$$
2. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f ;
3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat
4. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος
- i) Η συνάρτηση f έχει μοναδική ρίζα αν και μόνο αν είναι γνησίως μονότονη
- ii) Για μια συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$
- iii) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ
- iv) Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον x
- v) Μεταξύ δύο ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f'

(8 – 3 – 4 – 10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = 1$ με $f(x) + xf'(x) = \frac{1}{x}$

1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$
2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της
4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $ex = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$
5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον x και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$

(5 x 5 μονάδες)

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln^2 x + a \ln x + 2x^2 + 2a}{x}$, $a \in \mathbb{R}$ και $f(x) \geq 2a + 2$

1. Να δείξετε ότι $a = 2$
2. Να βρείτε τη μονοτονία της f'
3. Να βρείτε τη μονοτονία της f
4. Έστω συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, της οποίας η γραφική παράσταση έχει δύο κοινά σημεία με την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = xg'(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα

(6 – 7 – 5 – 7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{\sin x - f(x)}{x+1}$

1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x+1}$
2. Να δείξετε ότι $\int_0^a f(x) dx > \ln(a+1)$ για κάθε $a \in (-1, 0)$
3. Να δείξετε ότι $\int_\lambda^\pi f(x) dx > \int_\lambda^{2\pi} f(x) dx$ για κάθε $\lambda \in (-1, +\infty)$
4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot (x+1)^3 dx$

(5 – 8 – 6 – 6 μονάδες)