Θέμα Α

Α1 – γ , Α2 – β , Α3 – β , Α4 – δ , Α5 α – Λ, β – Σ , γ – Λ , δ – Λ , ε – Λ

Θέμα Β

Β1. (Ι) Σωστή απάντηση είναι η (α).

Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $d = A$ και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί από την κάτω ακραία θέση. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα θα έχει απομάκρυνση $y = +A$ οπότε για την αρχική φάση της ταλάντωσης έχουμε:

$$y = +A \Rightarrow A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = +A \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = +1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\kappa=0} \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\,rad$$

(ΙΙ) Σωστή απάντηση είναι η (β).

Στη ΘΙ ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = mg \Rightarrow k\Delta\ell = mg$

Από την εξίσωση της επιτάχυνσης έχουμε ότι: $\alpha_{max} = 2g \Rightarrow \omega^2 A = 2g$

και $D = k \Rightarrow m\omega^2 = k \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$ οπότε $\frac{k}{m}A = 2g \Rightarrow kA = 2mg$

Μέγιστο μέτρο η δύναμη του ελατηρίου έχει στην κάτω ακραία θέση:

$$F_{\varepsilon\lambda,max} = k\Delta\ell_{max} = k(\Delta\ell + A) = k\Delta\ell + kA = mg + 2mg \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda,max} = 3mg$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Εφαρμόζουμε ΑΔΟ τη στιγμή της κρούσης: $\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m\upsilon + 0 = 2m\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon_\kappa = \frac{\upsilon}{2}$

Για την ταλάντωση του σώματος και του συσσωματώματος πριν και μετά την κρούση ισχύει $D = k$ (σε μια τυχαία θέση του άξονα η δύναμη επαναφοράς είναι $\Sigma F = -F_{\varepsilon\lambda} = -kx \to D = k$)

Ισχύει ότι: $K_{\beta\lambda\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} = 2E \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = 2\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow m\upsilon^2 = 2kA^2$

Εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ για το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}m_{o\lambda}\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}DA^2 \xrightarrow{D=k} kA'^2 = 2m\frac{\upsilon^2}{4} + kA^2 \Rightarrow kA'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + kA^2 \Rightarrow$$

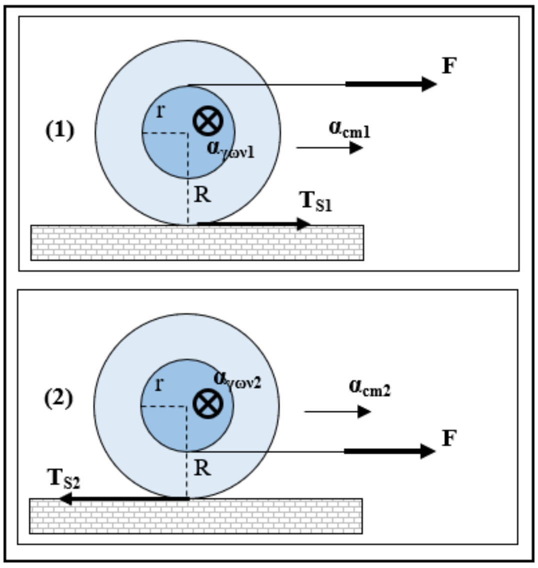
$$kA'^2 = \frac{1}{2}2kA^2 + kA^2 \Rightarrow kA'^2 = 2kA^2 \Rightarrow A' = \sqrt{2}A$$

Οπότε:

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon'_{max}} = \frac{\omega A}{\omega' A'} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}A}{\sqrt{\frac{k}{2m}}\sqrt{2}A} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}A}{\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}A} \Rightarrow \frac{\upsilon_{max}}{\upsilon'_{max}} = 1$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Εφαρμόζουμε για κάθε καρούλι τους θεμελιώδεις νόμους.



Καρούλι (1) ΘΝΜ: $\Sigma F_{1x} = m\alpha_{cm1} \Rightarrow F + T_{s1} = m\alpha_{cm1}\,(1)$

ΘΝΣ: $\Sigma\tau_1 = I\alpha_{\gamma\omega\nu1} \Rightarrow Fr - T_{S1}R = I\alpha_{\gamma\omega\nu1} \Rightarrow$

$$F \cdot 0{,}6R - T_{S1}R = I\frac{\alpha_{cm1}}{R} \Rightarrow 0{,}6F - T_{S1} = \frac{I}{R^2}\alpha_{cm1}\,(2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 1{,}6F = \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\alpha_{cm1}\,(3)$$

Καρούλι (2) ΘΝΜ:

$\Sigma F_{2x} = m\alpha_{cm2} \Rightarrow F - T_{s2} = m\alpha_{cm2}\,(4)$

ΘΝΣ: $\Sigma\tau_2 = I\alpha_{\gamma\omega\nu1} \Rightarrow T_{S2}R - Fr = I\alpha_{\gamma\omega\nu2} \Rightarrow$

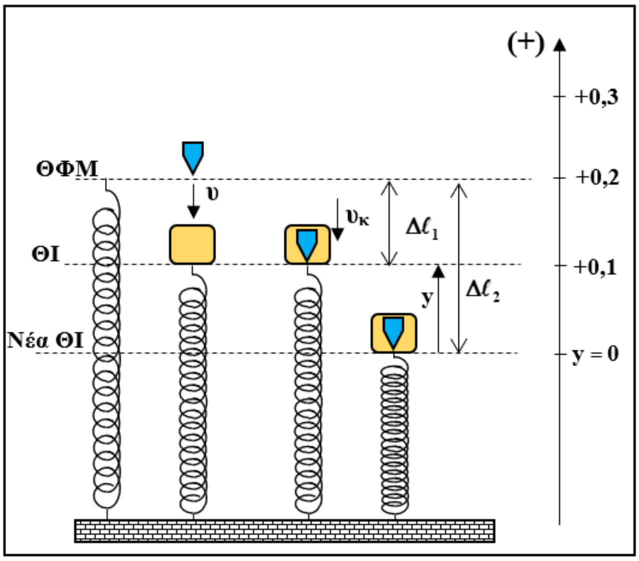
$$T_{S2}R - F\cdot 0{,}6R = I\frac{\alpha_{cm2}}{R} \Rightarrow T_{S2} - 0{,}6F = \frac{I}{R^2}\alpha_{cm2}\,(5)$$

$$(4)+(5) \Rightarrow 0{,}4F = \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\alpha_{cm2}\,(6)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (6) έχουμε:

$$\frac{(3)}{(6)} \Rightarrow 4 = \frac{\alpha_{cm1}}{\alpha_{cm2}} \Rightarrow \alpha_{cm1} = 4\alpha_{cm2}$$

Θέμα Γ



Γ1. Στη ΘΙ για το σώμα Σ ισχύει: $\Sigma F_1 = 0 \Rightarrow$

$$F_{\varepsilon\lambda 1} = m_1 g \Rightarrow k\Delta\ell_1 = m_1 g \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{m_1 g}{k} = 0{,}1m$$

Στη Νέα ΘΙ για το συσσωμάτωμα ισχύει:
$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda 2} = m_{o\lambda} g \Rightarrow k\Delta\ell_2 = m_{o\lambda} g \Rightarrow$

$$\Delta\ell_2 = \frac{m_{o\lambda} g}{k} = 0{,}2m$$

Στην τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F = F_{\varepsilon\lambda} - m_{o\lambda} g = k(\Delta\ell_2 - y) - m_{o\lambda} g \Rightarrow$$

$$\Sigma F = k\Delta\ell_2 - ky - m_{o\lambda} g \Rightarrow \Sigma F = -ky$$

Άρα $D = k = 50\frac{N}{m}$.

Γ2. Εφαρμόζουμε ΑΔΟ στην πλαστική κρούση: $\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m_1\upsilon = m_{o\lambda}\upsilon_\kappa \Rightarrow$

$$\upsilon_\kappa = \frac{m_1\upsilon}{m_{o\lambda}} \Rightarrow \upsilon_\kappa = 2\frac{m}{s}$$

Αμέσως μετά την κρούση εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_{o\lambda}\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}ky^2 \Rightarrow A^2 = \frac{m_{o\lambda}}{k}\upsilon_\kappa^2 + y^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m_{o\lambda}}{k}\upsilon_\kappa^2 + y^2} = 0{,}3m$$

όπου $|y| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 = 0{,}1m$

Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι: $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$

όπου $D = k = m_{o\lambda}\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5\sqrt{2}\frac{rad}{s}$ και $\upsilon_{max} = \omega A = 1{,}5\sqrt{2}\frac{m}{s}$

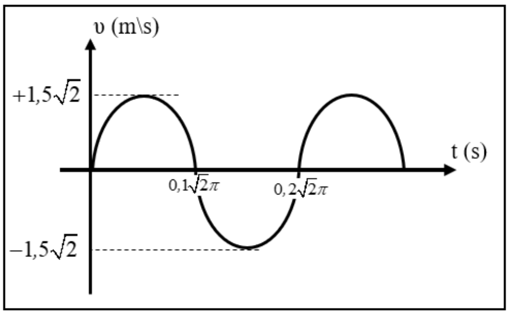
Η περίοδος της ταλάντωσης είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0{,}2\sqrt{2}\pi\, s$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται για πρώτη φορά μετά την κρούση στην κάτω ακραία θέση άρα $y = -A \Rightarrow A\cdot\eta\mu(\omega t + \varphi_0) = -A \Rightarrow$

$$\eta\mu(\varphi_0) = -1 = \eta\mu\frac{3\pi}{2} \text{ οπότε } \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}rad$$

Άρα $\upsilon = 1{,}5\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(5\sqrt{2}t + \frac{3\pi}{2}\right) S.I.$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.



Γ3. Για τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισχύει:

$$\Delta K = W_{\Sigma F} \Rightarrow dK = dW_{\Sigma F} \to \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F\cdot dy}{dt} = \Sigma F\cdot\upsilon = -Dy\cdot\upsilon \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -Dy\cdot\upsilon$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά την κρούση στη Νέα ΘΙ όπου $y = 0$.

Για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής ισχύει ότι: $\dfrac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dy = -ky$, οπότε στη Νέα ΘΙ όπου

$y = 0 \rightarrow \dfrac{dp}{dt} = 0$

Γ4. Το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου υπολογίζεται από τον τύπο $F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta\ell$, όπου $\Delta\ell$ η παραμόρφωση του ελατηρίου. Όταν το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου είναι $F_{\varepsilon\lambda} = 5N$ έχουμε:

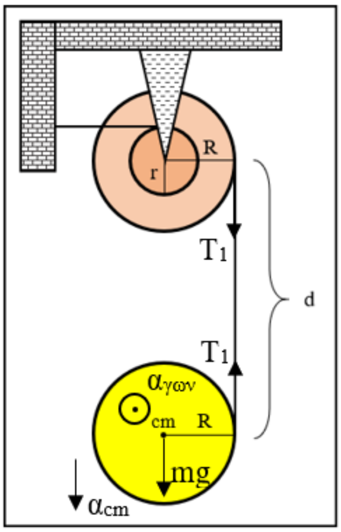
$F_{\varepsilon\lambda} = 5N \Rightarrow k \cdot \Delta\ell = 5N \Rightarrow 50 \cdot \Delta\ell = 5 \Rightarrow \Delta\ell = 0{,}1m$

Όταν το συσσωμάτωμα βρίσκεται πάνω από τη ΘΦΜ με παραμόρφωση $\Delta\ell = 0{,}1m$, η απομάκρυνση από τη Νέα ΘΙ είναι $y = \Delta\ell_2 + \Delta\ell = +0{,}3m = +A$ δηλαδή είναι στην άνω ακραία θέση άρα έχει ταχύτητα $\upsilon = 0$.

Όταν το συσσωμάτωμα βρίσκεται κάτω από τη ΘΦΜ με παραμόρφωση $\Delta\ell = 0{,}1m$, η απομάκρυνση από τη Νέα ΘΙ είναι $y = \Delta\ell_2 - \Delta\ell = +0{,}1m$. Η ταχύτητα υπολογίζεται ως εξής:

ΑΔΕΤ: $E = K + U \Rightarrow \dfrac{1}{2}kA^2 = \dfrac{1}{2}m_{o\lambda}\upsilon_\kappa^2 + \dfrac{1}{2}ky^2 \Rightarrow A^2 = \dfrac{m_{o\lambda}}{k}\upsilon^2 + y^2 \Rightarrow |\upsilon| = \sqrt{\dfrac{k}{m_{o\lambda}}}\sqrt{A^2 - y^2} = 2\dfrac{m}{s}$

<u>Θέμα Δ</u>



Δ1. Σχέση επιταχύνσεων. Ισχύει $y_{cm} = R\theta \rightarrow \dfrac{dy_{cm}}{dt} = R\dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow$

$\upsilon_{cm} = R\omega \rightarrow \dfrac{d\upsilon_{cm}}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_{cm} = R\alpha_{\gamma\omega\nu}$

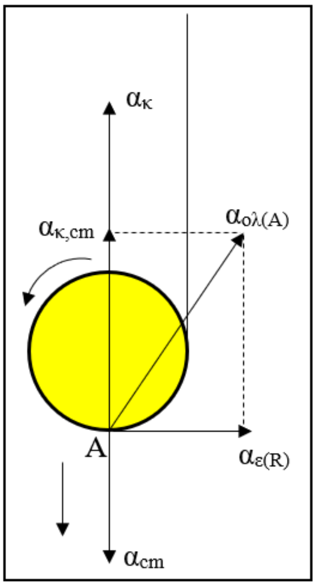
Εφαρμόζοντας τους θεμελιώδεις νόμους για την κίνηση του κυλίνδρου έχουμε: ΘΝΜ: $\Sigma F_y = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg - T_1 = m\alpha_{cm}\,(1)$

ΘΝΣ: $\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1R = I_{cm,\kappa\upsilon\lambda}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1R = \dfrac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$T_1 = \dfrac{1}{2}mR\alpha_{\gamma\omega\nu}$ όπου $R\alpha_{\gamma\omega\nu} = \alpha_{cm}$ άρα $T_1 = \dfrac{1}{2}m\alpha_{cm}\,(2)$

$(1)+(2) \Rightarrow mg = \dfrac{3}{2}m\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \dfrac{2}{3}g = \dfrac{20}{3}\dfrac{m}{s^2}$

Δ2. α) Η συνολική επιτάχυνση του κατώτερου σημείου Α της περιφέρειας του κυλίνδρου είναι:



$\vec{\alpha}_{o\lambda,A} = \vec{\alpha}_\kappa + \vec{\alpha}_{cm} + \vec{\alpha}_{\varepsilon(R)} = \vec{\alpha}_{\kappa,cm} + \vec{\alpha}_{\varepsilon(R)}$, για το μέτρο

$\alpha_{o\lambda,A} = \sqrt{\alpha_{\kappa,cm}^2 + \alpha_{\varepsilon(R)}^2}$ όπου κατά μέτρο $\alpha_{cm} = R\alpha_{\gamma\omega\nu} = \alpha_{\varepsilon(R)}$

και $\vec{\alpha}_{\kappa,cm} = \vec{\alpha}_\kappa + \vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow \alpha_{\kappa,cm} = \alpha_\kappa - \alpha_{cm} = 8\alpha_{cm} - \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{\kappa,cm} = 7\alpha_{cm}$

Οπότε $\alpha_{o\lambda,A} = \sqrt{\alpha_{\kappa,cm}^2 + \alpha_{\varepsilon(R)}^2} = \sqrt{49\alpha_{cm}^2 + \alpha_{cm}^2} \Rightarrow$

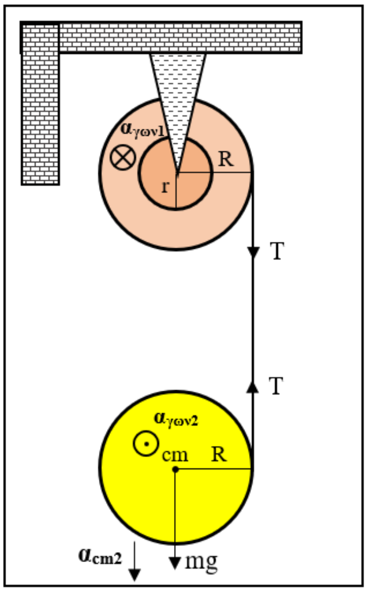
$\alpha_{o\lambda,A} = \sqrt{50\alpha_{cm}^2} = 5\sqrt{2}\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{o\lambda,A} = \dfrac{100\sqrt{2}}{3}\dfrac{m}{s^2}$.

β) Από τις εξισώσεις κίνησης έχουμε:

$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}t \Rightarrow t = \dfrac{\upsilon_{cm}}{\alpha_{cm}}$ και $y_{cm} = \dfrac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 \Rightarrow y_{cm} = \dfrac{\upsilon_{cm}^2}{2\alpha_{cm}}$

όπου $\alpha_\kappa = \dfrac{\upsilon_{\gamma\rho}^2}{R} = \dfrac{\upsilon_{cm}^2}{R} \Rightarrow \upsilon_{cm}^2 = R \cdot \alpha_\kappa = 8R \cdot \alpha_{cm} = \dfrac{32}{3}\dfrac{m^2}{s^2}$

άρα $y_{cm} = \dfrac{\upsilon_{cm}^2}{2\alpha_{cm}} \Rightarrow y_{cm} = 0{,}8m$



Δ3. Εφαρμόζουμε τους θεμελιώδεις νόμους στροφικής για τη διπλή τροχαλία και για τον κύλινδρο.

Για διπλή τροχαλία: $\Sigma\tau_1 = I_{\tau\rho o\chi}\alpha_{\gamma\omega\nu1} \Rightarrow TR = I_{\tau\rho o\chi}\alpha_{\gamma\omega\nu1}\ (3)$

Για κύλινδρο: $\Sigma\tau_2 = I_{cm,\kappa\upsilon\lambda}\alpha_{\gamma\omega\nu2} \Rightarrow TR = I_{cm,\kappa\upsilon\lambda}\alpha_{\gamma\omega\nu2}\ (4)$

Όμως $(3)=(4) \Rightarrow I_{\tau\rho o\chi}\alpha_{\gamma\omega\nu1} = I_{cm,\kappa\upsilon\lambda}\alpha_{\gamma\omega\nu2} \Rightarrow$

$$2I_{cm,\kappa\upsilon\lambda}\alpha_{\gamma\omega\nu1} = I_{cm,\kappa\upsilon\lambda}\alpha_{\gamma\omega\nu2} \Rightarrow \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu1}}{\alpha_{\gamma\omega\nu2}} = \frac{1}{2}$$

Δ4. Εύρεση σχέσης επιταχύνσεων. Για την κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου ισχύει:

$$y_{cm} = R\theta_1 + R\theta_2 \rightarrow \frac{dy_{cm}}{dt} = R\frac{d\theta_1}{dt} + R\frac{d\theta_2}{dt} \Rightarrow \upsilon_{cm} = R\omega_1 + R\omega_2 \rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = R\frac{d\omega_1}{dt} + R\frac{d\omega_2}{dt} \Rightarrow \alpha_{cm} = R\alpha_{\gamma\omega\nu1} + R\alpha_{\gamma\omega\nu2}$$

όμως $\frac{\alpha_{\gamma\omega\nu1}}{\alpha_{\gamma\omega\nu2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu1} = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu2}$ οπότε $\alpha_{cm} = \frac{3}{2}R\alpha_{\gamma\omega\nu2}$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική κίνηση για τον κύλινδρο έχουμε:

$$\Sigma F_y = m\alpha_{cm2} \Rightarrow mg - T = m\alpha_{cm2} \Rightarrow mg - T = \frac{3}{2}mR\alpha_{\gamma\omega\nu2}\ (5)$$

Από $(4) \Rightarrow TR = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu2} \Rightarrow T = \frac{1}{2}mR\alpha_{\gamma\omega\nu2}\ (6)$

$$(5),(6) \Rightarrow mg - T = 3T \Rightarrow T = \frac{mg}{4} = 5N$$

Δ5. Όταν το μήκος του κατακόρυφου νήματος έχει τριπλασιαστεί το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά $y_{cm} = 3d - d = 3{,}6m$. Από τις εξισώσεις που υπολογίζουν τη γωνία που διαγράφει το κάθε στερεό έχουμε:

Για διπλή τροχαλία $\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu1}t^2$ και για κύλινδρο $\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu2}t^2$ οπότε $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu1}}{\alpha_{\gamma\omega\nu2}} = \frac{1}{2}$.

Επίσης $y_{cm} = R\theta_1 + R\theta_2 = R\theta_1 + 2R\theta_1 \Rightarrow y_{cm} = 3R\theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{y_{cm}}{3R} = 6rad \rightarrow N_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$ στροφές

και $\theta_2 = 2\theta_1 = 12rad \rightarrow N_2 = \frac{\theta_2}{2\pi} = \frac{6}{\pi}$ στροφές