Θέμα Α

Α1 – β , Α2 – δ , Α3 – α , Α4 – α , Α5 α – Λ , β – Σ , γ – Σ , δ – Λ , ε – Λ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η σφαίρα δε δέχεται δύναμη στον άξονα $y'y$ (η δύναμη που δέχεται η σφαίρα από τον τοίχο είναι κάθετη) άρα η ορμή της δε μεταβάλλεται οπότε έχουμε:

$$\vec{p}_{y,\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{y,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m\upsilon_{1y} = m\upsilon_{2y} \Rightarrow \upsilon_1\eta\mu\varphi = \upsilon_2\eta\mu\theta \Rightarrow 0{,}6\upsilon_1 = 0{,}8\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{3}{4}\upsilon_1$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας είναι:

$$|\Delta p| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(m\upsilon_1)^2 + (m\upsilon_2)^2} = \sqrt{m^2\upsilon_1^2 + m^2\upsilon_2^2} = \sqrt{m^2\upsilon_1^2 + m^2\frac{9\upsilon_1^2}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}m^2\upsilon_1^2} \Rightarrow |\Delta p| = \frac{5}{4}m\upsilon_1$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Δοχείο ανοικτό: Bernoulli $p_{atm} + 0 + \rho gh = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + 0 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gh}$

Δοχείο κλειστό με έμβολο: Bernoulli $p_{\varepsilon\mu\beta} + 0 + \rho gh = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho\upsilon'^2 + 0 \Rightarrow$

$$p_{atm} + \frac{w_{\varepsilon\mu\beta}}{A} + \rho gh = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho\upsilon'^2 \Rightarrow \frac{2mg}{A} + \rho gh = \frac{1}{2}\rho\upsilon'^2 \Rightarrow \frac{2\rho Vg}{A} + \rho gh = \frac{1}{2}\rho\upsilon'^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2\rho hAg}{A} + \rho gh = \frac{1}{2}\rho\upsilon'^2 \Rightarrow 2\rho gh + \rho gh = \frac{1}{2}\rho\upsilon'^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho\upsilon'^2 = 3\rho gh \Rightarrow$$

$$\upsilon'^2 = 3\cdot 2gh \Rightarrow \upsilon' = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2gh} \Rightarrow \upsilon' = \sqrt{3}\,\upsilon$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (β).

ΘΕΕ για καρούλι (1):

$$K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda 1} - K_{o\lambda,\alpha\rho\chi 1} = W_F + W_{\tau_F} \Rightarrow K_1 - 0 = F\cdot d + F\cdot r\cdot\theta \Rightarrow K_1 = F\cdot R\cdot\theta + F\cdot\frac{R}{2}\cdot\theta \Rightarrow K_1 = \frac{3}{2}F\cdot R\cdot\theta$$

ΘΕΕ για καρούλι (2):

$$K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda 2} - K_{o\lambda,\alpha\rho\chi 2} = W_F + W_{\tau_F} \Rightarrow K_2 - 0 = F\cdot d - F\cdot r\cdot\theta \Rightarrow K_2 = F\cdot R\cdot\theta - F\cdot\frac{R}{2}\cdot\theta \Rightarrow K_2 = \frac{1}{2}F\cdot R\cdot\theta$$

Άρα $K_1 = 3K_2$.

Σε κάθε περίπτωση το έργο της στατικής τριβής που ασκείται στο καρούλι είναι μηδενικό αφού η στατική τριβή δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της οπότε δεν παράγει έργο.

Θέμα Γ

Γ1. Όλα τα σημεία της χορδής ευθυγραμμίζονται κάθε $\Delta t = 0{,}1s$ άρα $\Delta t = \frac{T}{2} = 0{,}1s \Rightarrow T = 0{,}2s$

Επίσης $f = \frac{1}{T} = 5Hz \rightarrow \omega = 2\pi f = 10\pi\frac{rad}{s}$. Από τη εξίσωση του στάσιμου έχουμε:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda = 4cm \text{ και } 2A = 20cm \Rightarrow A = 10cm = 0{,}1m$$

Αφού στη χορδή δημιουργούνται συνολικά έξι κοιλίες ισχύει $d = 5\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow d = \frac{11\lambda}{4} \Rightarrow d = 11cm$.

Η μέγιστη ταχύτητα μιας κοιλίας είναι: $v_{max} = \omega \cdot 2A \Rightarrow v_{max} = 2\pi \frac{m}{s}$

Γ2. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

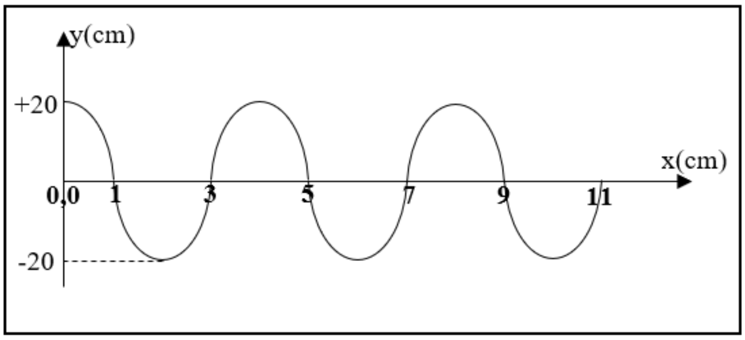
$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \Rightarrow y = 20 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \eta\mu(10\pi t)\ x, y\ \sigma\varepsilon\ cm$$

Η εξίσωση για το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή $t = 0{,}25\,s$ είναι:

$$y = 20 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \eta\mu(10\pi \cdot 0{,}25) \Rightarrow y = 20 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y = 20 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ x, y\ \sigma\varepsilon\ cm.$$

Για τη θέση $x = 0 \rightarrow y = +20cm$ και γνωρίζοντας ότι οι διαδοχικές κοιλίες έχουν διαφορά φάσης $\pi\,rad$ το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ3. Το σημείο Σ της χορδής που βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση $\frac{\lambda}{12}$ δεξιά του τρίτου δεσμού άρα η θέση του είναι $x_\Sigma = x_{\Delta_3} + \frac{\lambda}{12} = (2 \cdot 2 + 1)\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} = \frac{5\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} = \frac{16\lambda}{12} \Rightarrow x_\Sigma = \frac{4\lambda}{3} = \frac{16}{3}cm$.

Το πλάτος ταλάντωσής του είναι:

$$A'_\Sigma = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_\Sigma}{\lambda}\right)\right| = 20 \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x_\Sigma}{2}\right)\right| = 20 \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right| = 20 \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right| \Rightarrow$$

$$A'_\Sigma = 20 \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right| = 20 \cdot \frac{1}{2}cm \Rightarrow A'_\Sigma = 10cm$$

Γ4. Για τα σημεία της χορδής που ταλαντώνονται με πλάτος $A' = 10cm$ λύνοντας την τριγωνομετρική του πλάτους έχουμε:

$$A' = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right| \Rightarrow 10 = 20 \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right| \Rightarrow \left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right| = \frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi x}{2} = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{2} = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{6\kappa + 2}{3} \mapsto \kappa = 0 \rightarrow x_0 = \frac{2}{3}cm, \kappa = 1 \rightarrow x_1 = \frac{8}{3}cm... \\ \frac{\pi x}{2} = \kappa\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{6\kappa - 2}{3} \mapsto \kappa = 0 \rightarrow x'_0 = \frac{4}{3}cm, \kappa = 1 \rightarrow x'_1 = \frac{10}{3}cm... \end{cases}$$

Άρα $\Delta x_{min} = x'_0 - x_0 = \frac{4}{3}cm - \frac{2}{3}cm \Rightarrow \Delta x_{min} = \frac{2}{3}cm$

Θέμα Δ

Δ1. Ο δίσκος ισορροπεί υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$, του βάρους του $M\vec{g}$, της κάθετης δύναμης $\vec{N}$, της στατικής τριβής $\vec{T}_S$ και της τάσης του νήματος $\vec{T}_1$. Για την ισορροπία του δίσκου ισχύουν:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = Mg$, $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F + T_S = T_1\ (1)$ και $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow \tau_{T_S} = \tau_F \Rightarrow T_S R = FR \Rightarrow T_S = F = 20N$

και από $(1) \Rightarrow F + F = T_1 \Rightarrow T_1 = 2F = 40N$

Η διπλή τροχαλία ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους της, της δύναμης που δέχεται στον άξονά της και των τάσεων των νημάτων $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ που είναι τυλιγμένα στις περιφέρειες των δίσκων της. Για την ισορροπία της διπλής τροχαλίας ισχύει:

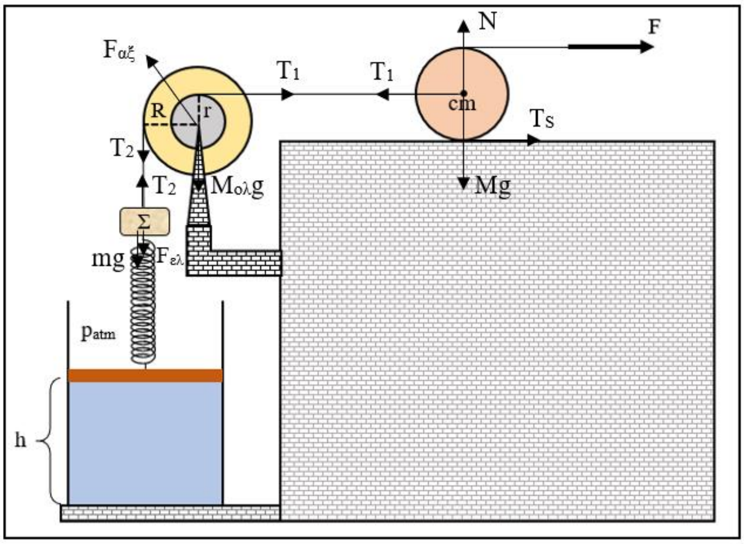
$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow \tau_{T_1} = \tau_{T_2} \Rightarrow T_1 r = T_2 R \Rightarrow$$

$$T_1 = 2T_2 \Rightarrow T_2 = 20N$$

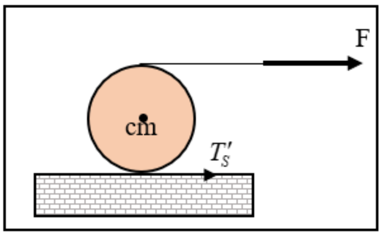
Το σώμα Σ ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους του $m\vec{g}$, της τάσης του νήματος $\vec{T}_2$ και της δύναμης του ελατηρίου $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$. Για την ισορροπία του σώματος Σ ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 = mg + F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$20 = 20 + F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 0$$ άρα το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος.



Δ2. Μόλις κοπεί το νήμα ο δίσκος θα κινηθεί υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$ και της στατικής τριβής T'_S εκτελώντας κύλιση χωρίς ολίσθηση για την οποία ισχύει $a_{cm} = R_1 a_{\gamma\omega\nu}$. Εφαρμόζοντας τους θεμελιώδεις νόμους έχουμε: ΘΝΜ: $\Sigma F_x = Ma_{cm} \Rightarrow F + T'_S = Ma_{cm}\ (2)$



ΘΝΣ: $\Sigma\tau = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_F - \tau_{T'_S} = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$$FR - T'_S R = \frac{1}{2}MR_1^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F - T'_S = \frac{1}{2}MR_1 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F - T'_S = \frac{1}{2}Ma_{cm}\ (3)$$

$$(2)+(3) \Rightarrow F + T'_S + F - T'_S = Ma_{cm} + \frac{1}{2}Ma_{cm} \Rightarrow 2F = \frac{3}{2}Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{4}{3}\frac{F}{M} \Rightarrow a_{cm} = \frac{20}{3}\frac{m}{s^2}$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή $t = 1{,}5s$ το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου είναι:

$$\upsilon_{cm} = a_{cm}t = \frac{20}{3}\cdot 1{,}5\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_{cm} = 10\frac{m}{s}$$

α) Η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι: $K_{o\lambda} = K_{\mu\tau\varphi} + K_{\sigma\tau\rho\varphi} = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$

$$K_{o\lambda} = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR_1^2\omega^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}M\upsilon_{cm}^2 \Rightarrow K_{o\lambda} = \frac{3}{4}M\upsilon_{cm}^2 \Rightarrow K_{o\lambda} = 300J$$

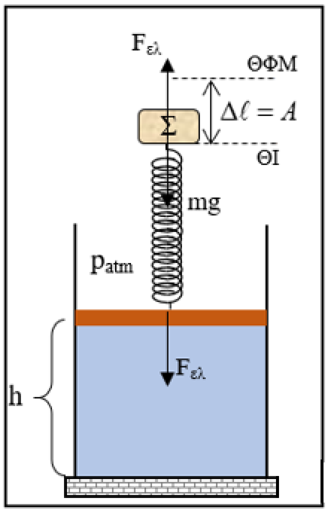
β) Ο ρυθμός που προσφέρει ενέργεια η δύναμη $\vec{F}$ (ισχύς της δύναμης) είναι:

$$P_F = \frac{dW_F}{dt} = \frac{dW_{F(\mu\tau\varphi)}}{dt} + \frac{dW_{F(\sigma\tau\rho\varphi)}}{dt} = \frac{F\cdot dx_{cm}}{dt} + \frac{FR\cdot d\theta}{dt} \Rightarrow$$

$$P_F = F\cdot\upsilon_{cm} + FR\cdot\omega = F\cdot\upsilon_{cm} + F\cdot\upsilon_{cm} = 2F\cdot\upsilon_{cm} \Rightarrow P_F = \frac{dW_F}{dt} = 400\frac{J}{s}$$

Δ4. Μόλις κοπεί το νήμα το σύστημα ελατήριο – σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ξεκινώντας από την ακραία θέση, γύρω από τη θέση ισορροπίας που απέχει $\Delta\ell$ από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow mg = k\cdot\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \frac{mg}{k} = 0{,}2m$$



Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A=\Delta\ell=0{,}2m$

Η ελάχιστη πίεση στον πυθμένα επικρατεί όταν κόβεται το νήμα. Το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και η δύναμη του ελατηρίου έχει ελάχιστο μέτρο $F_{\varepsilon\lambda,min}=0$.

Ισχύει: $p_{min}=p_{atm}+\rho gh=\left(10^5+10\cdot10^3\cdot1\right)\dfrac{N}{m^2}=\left(10\cdot10^4+10^4\right)\dfrac{N}{m^2}\Rightarrow p_{min}=11\cdot10^4\,\dfrac{N}{m^2}$

Η μέγιστη πίεση στον πυθμένα επικρατεί όταν το σώμα Σ βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση και η δύναμη του ελατηρίου ασκεί το έμβολο μέγιστου μέτρου δύναμη $F_{\varepsilon\lambda,max}=k\cdot\Delta\ell_{max}=k\cdot\left(\Delta\ell+A\right)=k\cdot2A\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda,max}=40N$.

Ισχύει: $p_{max}=p_{\varepsilon\mu\beta}+\rho gh=\dfrac{F_{atm}+F_{\varepsilon\lambda}}{A_{\varepsilon\mu\beta}}+\rho gh=\dfrac{F_{atm}}{A_{\varepsilon\mu\beta}}+\dfrac{F_{\varepsilon\lambda}}{A_{\varepsilon\mu\beta}}+\rho gh=p_{atm}+\dfrac{F_{\varepsilon\lambda}}{A_{\varepsilon\mu\beta}}+\rho gh\Rightarrow$

$$p_{max}=\left(10^5+\frac{40}{40\cdot10^{-4}}+10\cdot10^3\cdot1\right)\frac{N}{m^2}=\left(10\cdot10^4+10^4+10^4\right)\frac{N}{m^2}\Rightarrow p_{max}=12\cdot10^4\,\frac{N}{m^2}$$

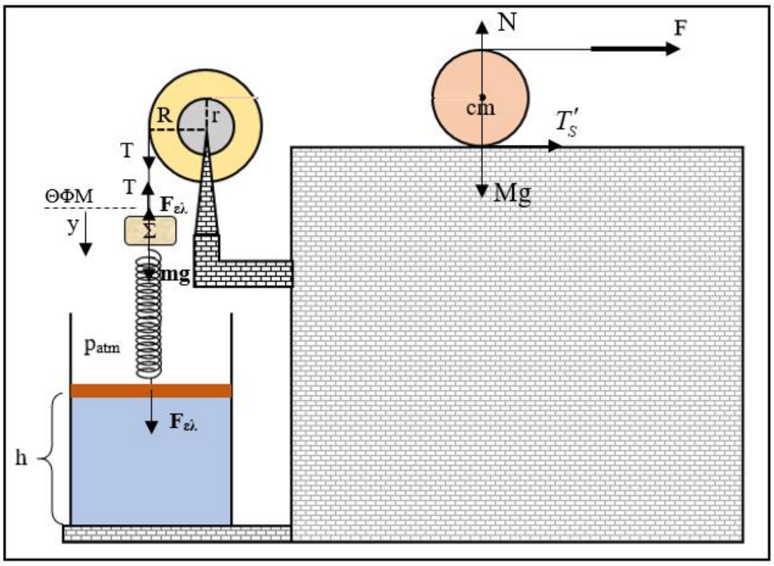
Άρα ο λόγος της ελάχιστης προς τη μέγιστη τιμή της πίεσης στον πυθμένα του κυλινδρικού δοχείου είναι: $\dfrac{p_{min}}{p_{max}}=\dfrac{11\cdot10^4}{12\cdot10^4}\Rightarrow\dfrac{p_{min}}{p_{max}}=\dfrac{11}{12}$

Δ5. Κόβοντας το νήμα που συνδέει τη διπλή τροχαλία με τον δίσκο, το σύστημα διπλή τροχαλία – σώμα Σ αρχίζει να κινείται με το κατακόρυφο νήμα που συνδέει τα δύο σώματα αρχικά να έχει σημεία που έχουν το ίδιο μέτρο ταχύτητας. Δηλαδή ισχύει:

$\upsilon_\Sigma=\upsilon_{\gamma\rho(R)}=R\omega\rightarrow$

$\dfrac{d\upsilon_\Sigma}{dt}=\dfrac{d\upsilon_{\gamma\rho(R)}}{dt}=R\dfrac{d\omega}{dt}\Rightarrow$

$a_\Sigma=a_{\varepsilon(R)}=Ra_{\gamma\omega\nu}$



Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο για κάθε σώμα έχουμε:

Για τροχαλία ΘΝΣ:

$\Sigma\tau=I_{o\lambda}a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow\tau_T=I_{o\lambda}a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow TR=I_{o\lambda}\dfrac{a}{R}\Rightarrow T=\dfrac{I_{o\lambda}}{R^2}a\ (4)$

Για το σώμα Σ ΘΝΜ: $\Sigma F=ma\Rightarrow mg-F_{\varepsilon\lambda}-T=ma\ (5)$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε: $\dfrac{(4)}{(5)}\Rightarrow\dfrac{T}{mg-F_{\varepsilon\lambda}-T}=\dfrac{I_{o\lambda}}{mR^2}\Rightarrow\dfrac{T}{mg-F_{\varepsilon\lambda}-T}=4\Rightarrow$

$T=4mg-4F_{\varepsilon\lambda}-4T\Rightarrow5T=4mg-4F_{\varepsilon\lambda}\Rightarrow T=\dfrac{4}{5}\left(mg-F_{\varepsilon\lambda}\right)\ (6)$

Λίγο μετά τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου για το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου έχουμε: $F_{\varepsilon\lambda}=ky$ όπου y η απόσταση που διανύει το σώμα Σ. Άρα η (6) γίνεται:

$T=\dfrac{4}{5}\left(mg-ky\right)\Rightarrow T=\dfrac{4}{5}\left(20-100y\right)\Rightarrow T=16-80y\ S.I.$

Για $y=0\rightarrow T=16N$, όταν $T=0\rightarrow y=0{,}2m$

[Η τάση μηδενίζεται (το νήμα χαλαρώνει) στη ΘΙ της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει στη συνέχεια το σώμα Σ, δηλαδή

$\Sigma F_{(\Sigma)}=0\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=mg\Rightarrow k\Delta\ell=mg\Rightarrow\Delta\ell=\dfrac{mg}{k}=0{,}2m=y$]