Θέμα Α

Α1 – δ , Α2 – δ , Α3 – α , Α4 – δ , Α5 α – Λ , β – Σ , γ – Σ , δ – Σ , ε – Σ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για μια ρευματική γραμμή που ξεκινά από ένα σημείο της ανώτερης επιφάνειας του δοχείου και καταλήγει στην οπή έχουμε:

$$p_{atm} + 0 + \rho g y = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 + 0 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gy}$$

Για την οριζόντια βολή της φλέβας έχουμε:

$$x = \upsilon t \Rightarrow t = \frac{x}{\upsilon} \text{ και } h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{\upsilon^2} \Rightarrow h = \frac{gx^2}{2\upsilon^2} = \frac{gx^2}{2\cdot 2gy} \Rightarrow h = \frac{x^2}{4y}$$

Για τη φλέβα της οπής που βρίσκεται σε ύψος h_1 έχουμε: $h_1 = \dfrac{x^2}{4y_1} \Rightarrow h_1 = \dfrac{x^2}{4(H-h_1)}$

Για τη φλέβα της οπής που βρίσκεται σε ύψος h_2 έχουμε: $h_2 = \dfrac{x^2}{4y_2} \Rightarrow h_2 = \dfrac{x^2}{4(H-h_2)}$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{H-h_2}{H-h_1} \Rightarrow h_1H - h_1^2 = h_2H - h_2^2 \Rightarrow h_2^2 - h_1^2 = h_2H - h_1H \Rightarrow (h_2-h_1)(h_2+h_1) = H(h_2-h_1) \Rightarrow$$

$$H = h_2 + h_1 = 3h_1 + h_1 \Rightarrow H = 4h_1$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Ο παρατηρητής απομακρύνεται με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ_A από ακίνητη ηχητική πηγή άρα

$$f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} f_S \Rightarrow \frac{N_A}{\Delta t} = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon}\frac{N_S}{\Delta t} \Rightarrow N_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} N_S$$

Β3. Ι. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Ισχύει: $r_1 - r_2 = \upsilon t_1 - \upsilon t_2 = \upsilon(t_1 - t_2) = \upsilon\Delta t = \upsilon\dfrac{T}{6} = \dfrac{\upsilon T}{6} = \dfrac{\lambda}{6} \Rightarrow r_1 - r_2 = \dfrac{\lambda}{6}$

Άρα το πλάτος ταλάντωσης είναι:

$$A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{6}\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\right| = 2A\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A' = A\sqrt{3}$$

ΙΙ. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Ο φελλός εξαιτίας των δύο κυμάτων εκτελεί σύνθετη ταλάντωση. Το πλάτος ταλάντωσής του μετά τη συμβολή των κυμάτων θα υπολογιστεί από τον τύπο:

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\Phi} = \sqrt{A^2 + 4A^2 + 2A\cdot 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}} = \sqrt{5A^2 + 2A\cdot 2A\frac{1}{2}} \Rightarrow A' = A\sqrt{7}$$

Θέμα Γ

Γ1. Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}6s$ το κύμα φτάνει στο σημείο Σ στη θέση $x_\Sigma = 1{,}2m$ άρα η ταχύτητα διάδοσης είναι: $\upsilon = \dfrac{x_\Sigma}{t} = \dfrac{1{,}2}{0{,}6}\dfrac{m}{s} \Rightarrow \upsilon = 2\dfrac{m}{s}$

Η συχνότητα του κύματος είναι: $\upsilon = \lambda f \Rightarrow f = \dfrac{\upsilon}{\lambda} \Rightarrow f = 5Hz$ και $T = \dfrac{1}{f} = 0{,}2s$.

Η εξίσωση του κύματος είναι: $y = A\eta\mu\left(\dfrac{2\pi t}{T} - \dfrac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 0{,}2\eta\mu(10\pi t - 5\pi x)\ S.I.$

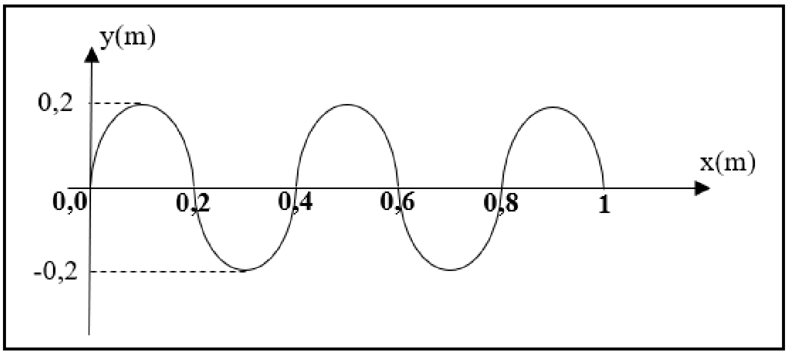
Γ2. Το κύμα τη χρονική στιγμή $t = 0{,}5s$ έχει φτάσει στο σημείο $x_{τελ} = υ \cdot t = 1m \rightarrow x_{τελ} = 2\lambda + \dfrac{\lambda}{2}$

Η απομάκρυνση της αρχής $(x=0)$ είναι: $y = 0{,}2ημ(10\pi \cdot 0{,}5) = 0{,}2ημ(5\pi) \Rightarrow y = 0$

Η απομάκρυνση του σημείου στη θέση $x = \dfrac{\lambda}{4} = 0{,}1m$ είναι:

$$y = 0{,}2ημ(10\pi \cdot 0{,}5 - 5\pi \cdot 0{,}1) = 0{,}2ημ(5\pi - 0{,}5\pi) = 0{,}2ημ\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = +0{,}2m$$

Το στιγμιότυπο του κύματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τα σημεία του θετικού ημιάξονα του ελαστικού μέσου που έχουν τη χρονική στιγμή $t = 0{,}5s$ μέγιστη κινητική ενέργεια είναι **έξι** και όπως φαίνεται από το παραπάνω στιγμιότυπο βρίσκονται στις θέσεις $x = 0,\ x = 0{,}2m,\ x = 0{,}4m,\ x = 0{,}6m,\ x = 0{,}8m,\ x = 1m$.

Γ3. Το σημείο Σ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_Σ = t = 0{,}6s$. Το σημείο Δ του ελαστικού μέσου βρίσκεται στη θέση $x_Δ = 0{,}2m$ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_Δ = \dfrac{x_Δ}{υ} = 0{,}1s$.
Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_Σ = t = 0{,}6s$ ταλαντώνεται για χρονικό διάστημα $\Delta t = 0{,}6s - 0{,}1s \Rightarrow \Delta t = 0{,}5s \rightarrow \dfrac{\Delta t}{T} = \dfrac{0{,}5}{0{,}2} = 2{,}5 \Rightarrow \Delta t = 2{,}5T = 2T + \dfrac{T}{2}$ άρα έχει εκτελέσει 2,5 ταλαντώσεις οπότε έχει βρεθεί τρείς φορές στην ακραία θέση $y = +A$ και δύο φορές στην ακραία θέση $y = -A$. Οπότε έχει αποκτήσει μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης **πέντε** φορές.

Γ4. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2Aσυν\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)ημ\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \Rightarrow y = 0{,}4συν(5\pi x)ημ(10\pi t)\ S.I.$$

Γ5. Για το σημείο Β στη θέση $x_Β = 0{,}2m$ τη χρονική στιγμή t' έχουμε:

$$y_Β = 0{,}4συν(5\pi x_Β)ημ(10\pi t') = 0{,}4συν(5\pi \cdot 0{,}2)ημ(10\pi t') = -0{,}4ημ(10\pi t') \Rightarrow$$
$$y_Β = -0{,}4ημ(10\pi t')$$

Για το σημείο Γ στη θέση $x_Γ = \dfrac{7}{15}m$ τη χρονική στιγμή t' έχουμε:

$$y_Γ = 0{,}4συν(5\pi x_Γ)ημ(10\pi t') = 0{,}4συν\left(5\pi \cdot \frac{7}{15}\right)ημ(10\pi t') = 0{,}4συν\left(\frac{7\pi}{3}\right)ημ(10\pi t') \Rightarrow$$

$$y_Γ = 0{,}4συν\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)ημ(10\pi t') \Rightarrow y_Γ = 0{,}2ημ(10\pi t')$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε: $\dfrac{y_Β}{y_Γ} = \dfrac{-0{,}4ημ(10\pi t')}{0{,}2ημ(10\pi t')} = -2 \Rightarrow y_Γ = -\dfrac{y_Β}{2} = -\dfrac{0{,}3}{2}m \Rightarrow y_Γ = -0{,}15m$

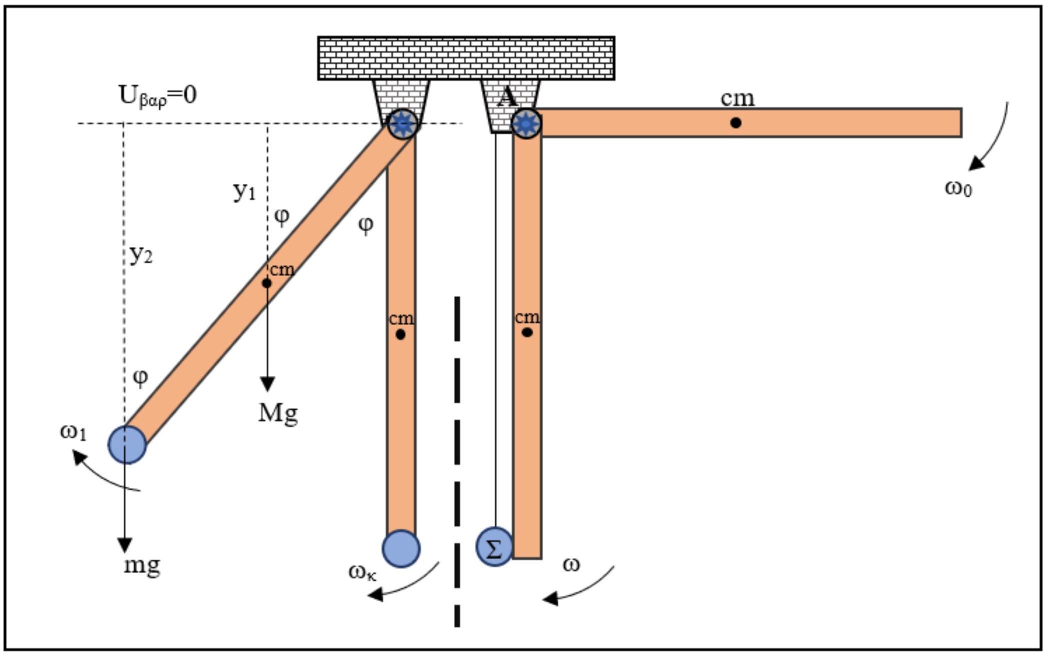
Θέμα Δ

Δ1. Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ για τη ράβδο από την οριζόντια στην κατακόρυφη θέση:

$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2} I_{ραβ(Α)}\omega_0^2 + 0 = \frac{1}{2} I_{ραβ(Α)}\omega^2 - Mg\frac{\ell}{2}$$

όπου $I_{ραβ(Α)} = I_{cm} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4} \Rightarrow I_{ραβ(Α)} = \frac{1}{3}M\ell^2 \to I_{ραβ(Α)} = 3Kg\cdot m^2$

$$\frac{1}{2} I_{ραβ(Α)}\omega^2 = \frac{1}{2} I_{ραβ(Α)}\omega_0^2 + Mg\frac{\ell}{2} \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{Mg\ell}{I_{ραβ(Α)}} = 80 + \frac{60}{3} = 100 \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$$



Δ2. Η κοινή γωνιακή ταχύτητα που αποκτούν τα σώματα αμέσως μετά την πλαστική κρούση θα υπολογιστεί εφαρμόζοντας ΑΔΣ, αφού ισχύει $\Sigma\tau_{εξ} = 0$.

$$\vec{L}_{ολ,πριν} = \vec{L}_{ολ,μετά} \Rightarrow L_{ραβ} = L_{συστ} \Rightarrow I_{ραβ(Α)}\omega = I_{ολ(Α)}\omega_\kappa \Rightarrow \omega_\kappa = \frac{I_{ραβ(Α)}}{I_{ολ(Α)}}\omega \Rightarrow$$

όπου $I_{ολ(Α)} = I_{ραβ(Α)} + I_{(m)} = \frac{1}{3}M\ell^2 + m\ell^2 = \frac{1}{3}M\ell^2 + \frac{1}{2}M\ell^2 \Rightarrow I_{ολ(Α)} = \frac{5}{6}M\ell^2 \to I_{ολ(Α)} = 7{,}5Kg\cdot m^2$

$$\omega_\kappa = \frac{3}{7{,}5}10\frac{rad}{s} \Rightarrow \omega_\kappa = 4\frac{rad}{s}$$

Δ3. Η θερμότητα που παράγεται εξαιτίας της πλαστικής κρούσης είναι:

$$Q = K_{πριν} - K_{μετά} = \frac{1}{2}I_{ραβ(Α)}\omega^2 - \frac{1}{2}I_{ολ(Α)}\omega_\kappa^2 = 150J - 60J \Rightarrow Q = 90J$$

Δ4. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ τη στιγμή που το σύστημα ράβδος – σώμα Σ έχει διαγράψει γωνία $\varphi = 60^o$ με την κατακόρυφο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK_\Sigma}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau_{(\Sigma)}}}{dt} = -\frac{\Sigma\tau_{(\Sigma)}d\theta}{dt} = -\Sigma\tau_{(\Sigma)}\cdot\omega_1 = -I_\Sigma\cdot\alpha_{γων}\cdot\omega_1 \Rightarrow \frac{dK_\Sigma}{dt} = -m\ell^2\cdot\alpha_{γων}\cdot\omega_1$$

Από ΘΝΣ: $\Sigma\tau = I_{ολ(A)} \cdot \alpha_{γων} \Rightarrow \alpha_{γων} = \dfrac{\Sigma\tau}{I_{ολ(A)}} = \dfrac{Mg\dfrac{\ell}{2}ημφ + mg\ell \cdot ημφ}{I_{ολ(A)}} \Rightarrow \alpha_{γων} = 4\sqrt{3}\dfrac{rad}{s^2}$

Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ για το σύστημα ράβδος – σώμα Σ από την κατακόρυφη θέση, στη θέση που σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο:

$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ} \Rightarrow K_{ολ,αρχ} + U_{ολ,αρχ} = K_{ολ,τελ} + U_{ολ,τελ} \Rightarrow$$

$$K_{ολ,αρχ} + U_{M,αρχ} + U_{m,αρχ} = K_{ολ,τελ} + U_{M,τελ} + U_{m,τελ} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{ολ(A)}\omega_\kappa^2 - Mg\frac{\ell}{2} - mg\ell = \frac{1}{2}I_{ραβ(A)}\omega_1^2 - Mg\,y_1 - mg\,y_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{ολ(A)}\omega_\kappa^2 - Mg\frac{\ell}{2} - mg\ell = \frac{1}{2}I_{ραβ(A)}\omega_1^2 - Mg\frac{\ell}{2}συνφ - mg\,\ell\,συνφ \Rightarrow \omega_1 = 2\sqrt{2}\frac{rad}{s}$$

Άρα: $\dfrac{dK_\Sigma}{dt} = -m\ell^2 \cdot \alpha_{γων} \cdot \omega_1 = -2\dfrac{9}{4} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}\dfrac{J}{s} \Rightarrow \dfrac{dK_\Sigma}{dt} = -36\sqrt{6}\dfrac{J}{s}$

Δ5. Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ για το σύστημα ράβδος – σώμα Σ από την κατακόρυφη θέση, στη θέση που ακινητοποιείται στιγμιαία:

$$E_{μηχ,αρχ} = E'_{μηχ,τελ} \Rightarrow K_{ολ,αρχ} + U_{ολ,αρχ} = K'_{ολ,τελ} + U'_{ολ,τελ} \Rightarrow$$

$$K_{ολ,αρχ} + U_{M,αρχ} + U_{m,αρχ} = 0 + U'_{M,τελ} + U'_{m,τελ} \Rightarrow$$

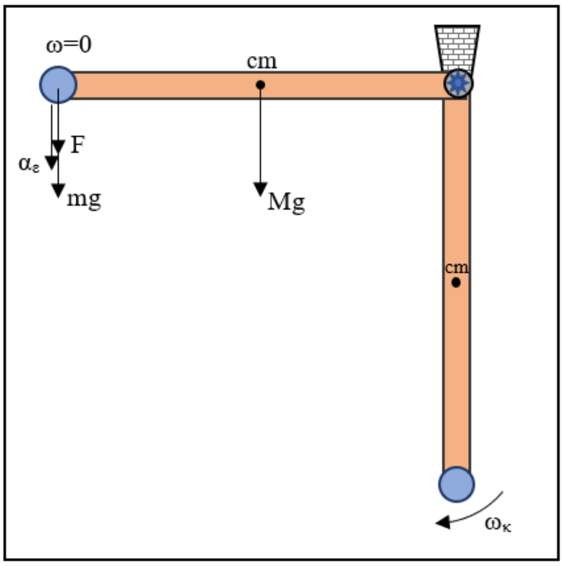
$$\frac{1}{2}I_{ολ(A)}\omega_\kappa^2 - Mg\frac{\ell}{2} - mg\ell = -Mg\,y'_1 - mg\,y'_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{ολ(A)}\omega_\kappa^2 - Mg\frac{\ell}{2} - mg\ell = -Mg\frac{\ell}{2}συνφ' - mg\,\ell\,συνφ' \Rightarrow συνφ' = 0 \rightarrow \varphi' = 90^o$$

Άρα ακινητοποιείται στην οριζόντια θέση.
Εφαρμόζοντας ΘΝΣ στην οριζόντια θέση έχουμε:

$$\Sigma\tau' = I_{ολ(A)} \cdot \alpha'_{γων} \Rightarrow \alpha'_{γων} = \frac{\Sigma\tau'}{I_{ολ(A)}} \Rightarrow$$

$$\alpha'_{γων} = \frac{Mg\dfrac{\ell}{2} + mg\ell}{I_{ολ(A)}} \Rightarrow \alpha'_{γων} = 8\frac{rad}{s^2}$$



Η επιτρόχια επιτάχυνση του σώματος στην οριζόντια θέση είναι: $\alpha_\varepsilon = \ell \cdot \alpha'_{γων} = 8\dfrac{3}{2}\dfrac{m}{s^2} \Rightarrow \alpha_\varepsilon = 12\dfrac{m}{s^2} < g$

Από τον 2ο Νόμο Newton έχουμε:

$$\Sigma F_y = m\alpha_\varepsilon \Rightarrow F + mg = m\alpha_\varepsilon \Rightarrow F = m\alpha_\varepsilon - mg \Rightarrow F = 4N$$