

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 18 / 5 / 2019

Θέμα Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγισιμη σε αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$. **Μονάδες 8**

A2. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις :

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+(\frac{1}{u})^2} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = - \int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du = -I \quad (\text{Θέσαμε } \frac{1}{u} = x$$

όποτε $dx = -\frac{1}{u^2} du$). Άρα $I = -I$ όποτε $I = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx > 0 \text{ επειδη } \frac{1}{1+x^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in [-1,1]. \quad \text{Μονάδες 3}$$

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης αποτελεί και ολικό μέγιστο της συνάρτησης»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). **Μονάδες 1+3**

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

β) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

δ) Αν f είναι παραγωγισιμη στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

ε) Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0.$$

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με εμβαδόν 4cm^2 .

B1. Αν είναι το μήκος της πλευράς $AB = x$, να εκφράσετε την πλευρά $B\Gamma$ του $AB\Gamma\Delta$ συναρτήσει του x και να αποδείξετε ότι, η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από την συνάρτηση $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$, $x > 0$. **Μονάδες 5**

B2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία τα ακρότατα και την κυρτότητα. **Μονάδες 8**

B3. Για τις τιμές του x για τις οποίες η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$ γίνεται ελάχιστη, να υπολογίσετε τις πλευρές $AB, B\Gamma$. Τι παρατηρείται;

Μονάδες 4

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να την σχεδιάσετε. **Μονάδες 8**

Θέμα Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε

$$x > 0 \text{ ισχύει } f(x) = (e^x - 1) \cdot \ln x.$$

G1. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ και να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

Μονάδες 4

G2. α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή για κάθε $x \geq 1$. (μονάδες 4)

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
 Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
 Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
 www.en-dynamei.gr



β) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $\frac{e^x - 1}{e - 1} > \frac{x - 1}{\ln x}$. (μονάδες 4) **Μονάδες 8**

Γ3. Αν επιπλέον η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi) = 0$.

Μονάδες 4

β) Να λυθεί η ανίσωση : $f(x^2 + 1) > \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln x)}{x} dx$.

Μονάδες 9

Θέμα Δ

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $[-4, 4]$, για την οποία ισχύει :

- $x^2 + f^2(x) = 16$, για κάθε $x \in [-1, 1]$
- $f(0) = 4$

Δ1. α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. (μονάδα 1)

β) Να δείξετε ότι : $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $x \in [-4, 4]$. (μονάδες 3) **Μονάδες 4**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $x^3 - \int_0^1 x \cdot f(t^3) dt + 2 = 0$ έχει ακριβώς μια αρνητική και δυο θετικές και ρίζες.

Μονάδες 9

Δ3. Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \in [-4, 4]$.

Καθώς περνάει από το σημείο $A(2, f(2))$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3m/s . Να βρείτε τον ρυθμό της τετμημένης x την χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A .

Μονάδες 4

Δ4. Αν F μια παράγουσα της f στο $[-4, 4]$ με $F(0) = 0$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = F(x) + F(-x)$, $x \in [-4, 4]$ είναι σταθερή. (μονάδες 4)

β) Έστω E το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, όπου $-4 \leq \alpha < 0 < \beta \leq 4$.

Αν ο άξονας $y'y$ χωρίζει το χωρίο Ω σε δυο ισεμβαδικα χωρία, τότε να δείξετε ότι $\alpha + \beta = 0$. (μονάδες 4)

Μονάδες 8