

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

02/03/2019

ΖΗΤΗΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια αρχική της f στο Δ τότε να αποδείξετε ότι

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ
- Κάθε άλλη παράγουσα της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ (7 M)

A2. Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής μιας συνάρτησης f (4 M)

A3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός: «Αν για τη συνεχή συνάρτηση f στο $[a, \beta]$ ισχύει $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ τότε

$f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ ». Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να δώσετε ένα παράδειγμα που να επιβεβαιώνει την απάντησή σας. (1- 3 M)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως αληθείς ή ψευδείς

1. Αν $f'(x) = (x-1)(x+2)^2$ για κάθε x , το $f(-2)$ είναι τοπικό ακρότατο της f
2. Αν η συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in [a, \beta]$ τότε $f'(x_0) = 0$
3. Το $\int_{-1}^1 (x^3 - x) dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$ και τον άξονα των x
4. Ισχύει $\ln x < x - 1$ για κάθε $x > 0$
5. Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, όπου f, g συνεχείς συναρτήσεις, τότε $\int_a^\beta f(x) dx \geq \int_a^\beta g(x) dx$ (10μ)

ΖΗΤΗΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$

- B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (7 M)
- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (8 M)
- B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f (5 M)

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
 Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
 Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
 www.en-dynamei.gr



B4. Για $x > 1$ να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , της εφαπτομένης της στο σημείο $A(2, f(2))$ και της ευθείας $x = 3$. **(5 M)**

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x-2}$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι $\alpha^{\beta-2} > \beta^{\alpha-2}$ για κάθε $2 < \alpha < \beta$ **(7 M)**

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $e^x = x - 1$ **(8 M)**

Γ3. Έστω G αρχική της g στο $(2, +\infty)$ με $G(3) = 0$, $G(9) = 1$

- I) Να δείξετε ότι G κοίλη και να βρεθεί η εφαπτομένη της C_G στο $x_0 = 3$ **(5 M)**
- II) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_G , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 3$ και $x = 9$ να δείξετε ότι $E < 9$ **(5 M)**

ΖΗΤΗΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει

$$f'(x)(1 - 2 \ln x) + xf''(x) = \frac{2f(x)}{x} \text{ για κάθε } x > 0 \text{ με } f(1) = 1, f'(1) = 0$$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της f . **(5 M)**

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται ότι $f(x) = e^{\ln^2 x}$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι $f(k) = k^{\ln k}$ **(5 M)**

Δ3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $a, \beta \in (0, +\infty)$ και $\gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\alpha^{\ln a} + \beta^{\ln \beta} = 2 - \gamma^2$ **(5 M)**

Δ4. Έστω $g(x) = \ln f(x)$, $x > 1$

i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g , την εφαπτομένη της στο $x_0 = e$ και την ευθεία $x = e^2$. **(5 M)**

ii) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{g^{-1}}$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = 4$ **(5 M)**