Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
24/11/2019

ΖΗΤΗΜΑ Α

Α3) Γ   Α5) ΨΕΥΔΗΣ πρέπει το Α να είναι διάστημα

ΖΗΤΗΜΑ Β

$A_f = \mathbb{R} - \{2\}$

Β1) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4+1}{x-2} = \dfrac{(x-2)^2+1}{x-2} = x-2+\dfrac{1}{x-2}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2}$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \dfrac{1}{(x-2)^2} \Leftrightarrow (x-2)^2 > 1 \Leftrightarrow$

$|x-2| > 1 \Leftrightarrow x-2 < -1$ ή $x-2 > 1$ άρα $x < 1$ ή $x > 3$.

x	1	2	3	
f'	+	−	‖ −	+

Β2) $f''(x) = \dfrac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \dfrac{2}{(x-2)^3}$

		2	
f''	−	‖	+

Β3)

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4x+5}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x^2-4x+5)\dfrac{1}{x-2} = +\infty$

γιατί $\lim_{x\to 2^+}(x^2-4x+5) = 1 > 0$ κι $x-2>0$ δεξιά του 2 άρα $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2} = +\infty$

Η $x=2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-4x+5}{x^2-2x} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2} = 1 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x+5-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x-2} =$

άρα η ευθεία $y=x-2$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$
Ομοίως στο $-\infty$ η $y=x+2$ πλάγια ασύμπτωτη

ΖΗΤΗΜΑ Γ

1) Η εφαπτομένη στο $M(-1, f(-1))$ // στην $\cancel{x}+\frac{1}{2}y=0$ άρα
$f'(-1)=-2$ $\quad \hookrightarrow \lambda=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$

2) $[1,2] \xrightarrow[f]{\text{ΘΜΤ}} f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)=$

$=f(2)-\left(\dfrac{3f(2)-7}{3}\right)=f(2)-f(2)+\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$

Έστω ότι υπάρχει $\xi_1\in(1,2)$ με $\xi_1\neq\xi$ τ.ω. $f'(\xi_1)=\frac{7}{3}$
$[\xi_1,\xi]$ ή $[\xi,\xi_1]$ εφαρμόζουμε Θ. Rolle άρα υπάρχει
κ τ.ω. $f''(\kappa)=0$ άτοπο.
ή $f''(x)>2 \Rightarrow f'\uparrow$ άρα και 1-1

3) $[-1,1] \xrightarrow[f']{\text{ΘΜΤ}} f''(\xi_2)=\dfrac{f'(1)-f'(-1)}{2}=\dfrac{f'(1)+2}{2}$

αλλά $f''(x)>2$ άρα $f''(\xi_2)>2 \Leftrightarrow \dfrac{f'(1)+2}{2}>2 \Leftrightarrow f'(1)>2$

4) $[1,\frac{3}{2}] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(x_1)=\dfrac{f(\frac{3}{2})-f(1)}{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{f(3/2)-f(1)}{\frac{1}{2}}$

$[\frac{3}{2},2] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(x_2)=\dfrac{f(2)-f(3/2)}{2-3/2}=\dfrac{f(2)-f(3/2)}{\frac{1}{2}}$ $\Bigg\}$ (+)

$f'(x_1)+f'(x_2)=\dfrac{-f(1)+f(2)}{\frac{1}{2}}=\dfrac{f(2)-f(1)}{\frac{1}{2}}=2f'(\xi)$ από (2)

5) $(f'(x))^2-2xf'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)(f'(x)-2x)=0.$

• $f''(x) > 2$ άρα $f' \uparrow$

$x>1 \Longrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 2 > 0$

• $f'(x) - 2x = 0$ Έστω $h(x) = f'(x) - 2x$

$h'(x) = f''(x) - 2 > 0$ άρα $h \uparrow$

$x>1 \Rightarrow h(x) > h(1) \Leftrightarrow h(x) > f'(1) - 2 > 0$ άρα $h(x) > 0$.

Επομένως η $f(x)\left(f'(x) - 2x\right) = 0$ αδύνατη

ΖΗΤΗΜΑ Δ

1) $f^2(x) + 2f(x)\ln x = 3\ln^2 x \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x)\ln x + \ln^2 x = 4\ln^2 x$

$\Leftrightarrow \left(f(x) + \ln x\right)^2 = 4\ln^2 x \Leftrightarrow |f(x) + \ln x| = 2|\ln x|$ (1)

Έστω $g(x) = f(x) + \ln x$, g συνεχής ως άθροισμα συνεχών

και $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο

σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Αλλά $g(e) = f(e) + \ln e = 1 + 1 = 2 > 0$ άρα $g(x) > 0$ στο $(1,+\infty)$

(1) $\Rightarrow f(x) + \ln x = 2|\ln x| \xLeftrightarrow[\ln x > 0]{x>1} f(x) + \ln x = 2\ln x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \ln x}$

$g(e^{-1}) = f(e^{-1}) + \ln e^{-1} = -1 - 1 = -2 < 0$ άρα $g(x) < 0$ στο $(0,1)$

(1) $\Rightarrow -f(x) - \ln x = 2|\ln x| \xLeftrightarrow[\ln x < 0]{0<x<1} -f(x) - \ln x = -2\ln x \Leftrightarrow$

$-f(x) = -\ln x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \ln x}$ $\quad f(1) = 0$ άρα

$f(x) = \ln x$ για κάθε $x > 0$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

2) Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \xrightarrow{K \in (\varepsilon)} -1 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0)$

$-1 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(-x_0) \Leftrightarrow -1 - \ln x_0 = -1 \Leftrightarrow \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$

άρα $A(1, 0)$: $y - 0 = (x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$

3) Έστω $M(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha'(t) = 0{,}5$ και $\alpha(t_0) = 1$

Έστω ω η γωνία

$\varepsilon\varphi\omega = f'(\alpha) \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{1}{\alpha(t)}$ Παραγωγίζω

$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\omega'(t) = -\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)} \Rightarrow \omega'(t) = -\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)}\sigma\upsilon\nu^2\omega(t) \Rightarrow$

$\omega'(t) = -\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)}\frac{1}{\varepsilon\varphi^2\alpha(t)+1} \Rightarrow \omega'(t) = -\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)}\frac{1}{\frac{1}{\alpha^2(t)}+1}$

$t = t_0 : \omega'(t_0) = -\frac{\alpha'(t_0)}{\alpha^2(t_0)}\frac{1}{\frac{1}{\alpha^2(t_0)}+1} = -\frac{0{,}5}{1}\frac{1}{1+1} = -\frac{0{,}5}{2} = -\frac{1}{4}$ rad/s

4) $f(x+1) < \frac{1}{x} + f(x) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$

$[x, x+1] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(\lambda) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = \ln(x+1) - \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$x < \lambda \overset{f' \downarrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) > f'(\lambda) \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln x$

5) $\lim_{x \to +\infty}\left[x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right] \overset{0/0}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \to +\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$

$\lim_{x \to +\infty}\frac{\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty}\frac{x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty}\frac{x}{x} = 1$