

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΖΗΤΗΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{Q}^*$ στο \mathbb{Q}^* ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$ (6 M)

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (5 M)

A3. Το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$ ισούται με

A. $\frac{1}{x^2}$ B. $-\frac{2}{x^2}$ Γ. $-\frac{1}{x^2}$ Δ. $-\frac{2}{x}$ E. 0 (3 M)

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την.

A4. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (7 M)

A5. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο A ». Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή αιτιολογώντας την απάντησή σας με ένα παράδειγμα ή μια πρόταση της θεωρίας (1 – 3 M)

ΖΗΤΗΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$

1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης και το πρόσημό της (8 M)
2. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης και το πρόσημό της (8 M)
3. Να βρείτε όλες τις ασύμπτωτες της C_f (αν υπάρχουν) (9 M)

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν:

- $3f(1) = 3f(2) - 7$
- $f''(x) > 2$

- Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(-1, f(-1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x + \frac{1}{2}y = 0$
1. Να δείξετε ότι $f'(-1) = -2$
 2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{7}{3}$
 3. Να αποδείξετε ότι $f'(1) > 2$
 4. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 2f'(\xi)$
 5. Να αποδείξετε ότι είναι αδύνατη στο $(1, 2)$ η εξίσωση $(f'(x))^2 - 2xf'(x) = 0$

(5x5 M)

ΖΗΤΗΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, για την οποία ισχύουν

- $f(e) = 1, f(e^{-1}) = -1$
- $f^2(x) + 2f(x)\ln x - 3\ln^2 x = 0$ για κάθε $x > 0$

1. Να βρείτε τον τύπο της f

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε ότι $f(x) = \ln x$

2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης (ε), της C_f που διέρχεται από το σημείο $K(0, -1)$
3. Ένα σώμα M κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $0,5 \text{ m/s}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$, στο σημείο M , τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα M διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$
4. Να αποδείξετε ότι $f(x+1) < \frac{1}{x} + f(x)$ για κάθε $x > 0$
5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot f\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$

(5x5 M)