Θέμα Α

Α1 – β , Α2 – α , Α3 – β , Α4 – δ , Α5 α – Λ, β – Σ , γ – Σ , δ – Σ , ε – Λ

Θέμα Β

Β1. Ι. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Επειδή οι ταλαντώσεις έχουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \pi\, rad$ για το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης ισχύει: $A_{ολ} = |A_1 - A_2| = |A - 2A| \Rightarrow A_{ολ} = A$

Η αρχική φάση της σύνθετης ταλάντωσης θα είναι ίση με την αρχική φάση της ταλάντωσης που έχει το μεγαλυτερο πλάτος, δηλαδή $A_2 > A_1$ άρα $\varphi_0 = \varphi_{02} = \pi\, rad$

ΙΙ. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η σύνθετη έχει την ίδια ενέργεια με τις επιμέρους ταλαντώσεις άρα:

$$E_{ολ} = E_1 = E_2 \Rightarrow A_{ολ} = A_1 = A_2 = A$$

$$A_{ολ} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi} \Rightarrow A^2 = A^2 + A^2 + 2A^2\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\Delta\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{3} rad \Rightarrow \varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{2\pi}{3} rad \Rightarrow \varphi_{01} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} rad \Rightarrow \varphi_{01} = \pi\, rad$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Τη χρονική στιγμή t_1 ο ταλαντωτής έχει χάσει το 50% της αρχικής του ενέργειας άρα $E_1 = \frac{E_0}{2}$.

Αποδεικνύεται ότι: $E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}D\left(A_0 e^{-\Lambda t}\right)^2 = \frac{1}{2}D A_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t}$.

Έχουμε: $E_1 = \frac{E_0}{2} \Rightarrow E_0 e^{-2\Lambda t_1} = \frac{E_0}{2} \Rightarrow e^{-2\Lambda t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\Lambda t_1 = ln 2 \; (1)$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 4t_1$ ο ταλαντωτής έχει ενέργεια $E_2 = E_0 e^{-2\Lambda t_2}$,

όπου $2\Lambda t_2 = 2\Lambda 4t_1 = 4 \cdot 2\Lambda t_1 = 4 ln 2 = ln 2^4$ άρα $E_2 = E_0 e^{-ln 2^4} = \frac{E_0}{ln 2^4} = \frac{E_0}{2^4} \Rightarrow E_2 = \frac{E_0}{16}$

Στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ η ενέργεια που έχει χάσει ο ταλαντωτής είναι:

$$|\Delta E| = E_1 - E_2 = \frac{E_0}{2} - \frac{E_0}{16} \Rightarrow |\Delta E| = \frac{7}{16}E_0$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Για το σύστημα των δύο δίσκων ισχύει $\Sigma\tau_{εξ} = 0$ οπότε ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής:

$$\vec{L}_{ολ,αρχ} = \vec{L}_{ολ,τελ} \Rightarrow \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_{κοινή} \; (\uparrow +)$$

$$-L_1 + L_2 = L_{κοινή} \Rightarrow -I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = I_{ολ}\omega_\kappa \Rightarrow -I\omega_1 + 3I\omega_1 = 2I\omega_\kappa \Rightarrow \omega_\kappa = \omega_1$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου Ενέργειας για τον δίσκο Δ1 έχουμε:

$$\Delta K_1 = W_{\tau_1} \Rightarrow K_{1,τελ} - K_{1,αρχ} = W_{\tau_1} \Rightarrow W_{\tau_1} = \frac{1}{2}I_1\omega_\kappa^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 \Rightarrow W_{\tau_1} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 \Rightarrow W_{\tau_1} = 0$$

Θέμα Γ

Γ1. Το σύστημα ελατήριο k_1 - σώματα Σ, $Σ_1$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = d = 0,6m$. Στη θέση ισορροπίας του συστήματος ελατήριο k_1 - σώματα Σ, $Σ_1$ ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k_1 \cdot \Delta\ell = \left(M + m_1\right) g \Rightarrow \Delta\ell = \frac{\left(M + m_1\right) g}{k_1} = 0,2m$$

Σε μια τυχαία θετική απομάκρυνση της ταλάντωσης του συστήματος ελατήριο k_1 - σώματα Σ, $Σ_1$ έχουμε για το σώμα $Σ_1$: $\Sigma F_{1y} = m_1 \alpha \Rightarrow F_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} - m_1 g = -m_1 \omega^2 y \Rightarrow F_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} = m_1 g - m_1 \omega^2 y$

Όταν χαθεί η επαφή $F_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} = 0 \Rightarrow m_1 g = m_1 \omega^2 y \Rightarrow y = \dfrac{g}{\omega^2}$

όπου $D = k_1 \Rightarrow \left(M + m_1\right)\omega^2 = k_1 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k_1}{M + m_1}}$

άρα $y = \dfrac{\left(M + m_1\right) g}{k_1} = \Delta\ell = 0,2m < A = 0,6m$ οπότε χάνει επαφή στο φυσικό μήκος του ελατηρίου σταθεράς k_1.

Γ2. Εφαρμόζοντας την ΑΔΕΤ στο φυσικό μήκος του ελατηρίου σταθεράς k_1 έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2}\left(M + m_1\right)\upsilon^2 + \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow k_1 A^2 = \left(M + m_1\right)\upsilon^2 + k_1 y^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = \frac{k_1}{M + m_1}\left(A^2 - y^2\right) \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{\frac{k_1}{M + m_1}}\sqrt{A^2 - y^2}$$ όμως $\upsilon > 0 \Rightarrow \upsilon = +4\dfrac{m}{s}$

Γ3. Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για το σώμα $Σ_1$ από τη στιγμή που χάνει επαφή μέχρι τη στιγμή της κρούσης στη θέση ισορροπίας ταλάντωσης του σώματος $Σ_2$:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{m_1 g} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 - \frac{1}{2} m_1 \upsilon^2 = -m_1 g h \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\upsilon^2 - 2gh} \Rightarrow \upsilon_1 = 2\frac{m}{s}$$

Στη θέση ισορροπίας του συστήματος ελατήριο k_2 - σώμα $Σ_2$ ισχύει:

$$\Sigma F_2 = 0 \Rightarrow k_2 \cdot \Delta\ell_2 = m_2 g \Rightarrow \Delta\ell_2 = \frac{m_2 g}{k_2} = 0,1m$$

Η ταχύτητα του σώματος $Σ_2$ πριν την κρούση στη θέση ισορροπίας του έχει μέτρο:

$$\upsilon_{2max} = \omega_2 A_2 = \sqrt{\frac{D'}{m_2}} A_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} A_2 \Rightarrow \upsilon_{2max} = 2\frac{m}{s}$$

Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρηση Ορμής στην κρούση:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{\kappa o\iota\nu\acute{\eta}} \Rightarrow m_1 \upsilon_1 - m_2 \upsilon_{2max} = \left(m_1 + m_2\right)\upsilon_{\kappa o\iota\nu\acute{\eta}} \Rightarrow \upsilon_{\kappa o\iota\nu\acute{\eta}} = 0$$

Άρα το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση παραμένει στιγμιαία ακίνητο οπότε θα βρίσκεται στην ακραία θέση της νέας ταλάντωσης που εκτελεί γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας που βρίσκεται πιο κάτω. Στη θέση ισορροπίας του συστήματος ελατήριο k_2 - συσσωμάτωμα ισχύει:

$$\Sigma F_3 = 0 \Rightarrow k_2 \cdot \Delta\ell_3 = \left(m_1 + m_2\right) g \Rightarrow \Delta\ell_3 = \frac{\left(m_1 + m_2\right) g}{k_2} = 0,2m$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι: $A' = \Delta\ell_3 - \Delta\ell_2 \Rightarrow A' = 0,1m$

Γ4. Για το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος $Σ_2$ ισχύει:

$$\frac{\left|d\vec{p}_{2max}\right|}{dt} = \left|\Sigma F_{2max}\right| = m_2\, \alpha'_{max} = m_2\, \omega'^2 A' = m_2 \frac{k_2}{m_1 + m_2} A' \Rightarrow \frac{\left|d\vec{p}_{2max}\right|}{dt} = 5N$$

Θέμα Δ

Δ1. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής είναι:

$$I_{\text{ολ}(A)} = I_{\text{ραβ}(A)} + I_{m_1} \Rightarrow$$

$$I_{\text{ολ}(A)} = \frac{1}{3}M\ell^2 + m_1\ell^2 = 2Kg\cdot m^2$$

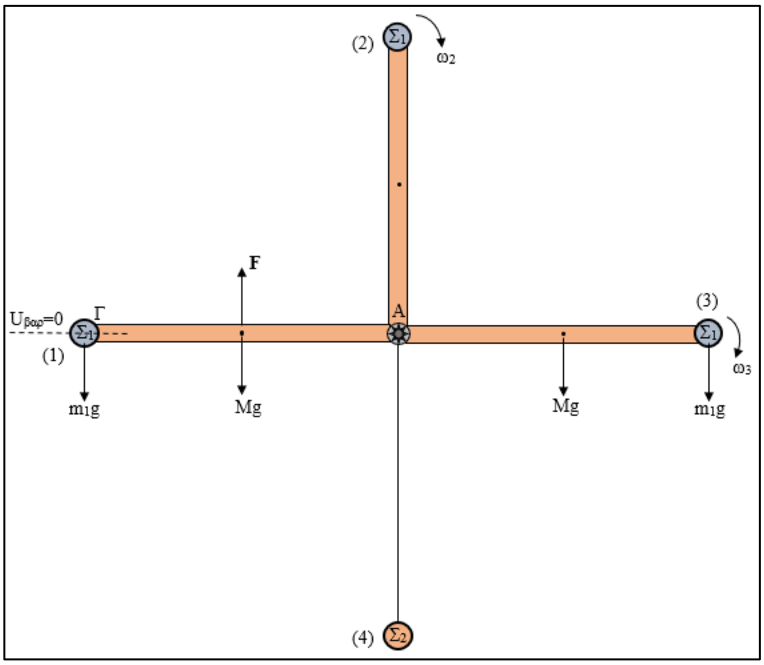
Εφαρμόζουμε ΘΕΕ από τη θέση (1) στη θέση (2):

$$K_2 - K_1 = W_F^{1\to2} + W_{Mg}^{1\to2} + W_{m_1g}^{1\to2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{\text{ολ}(A)}\omega_2^2 - 0 = F\frac{\ell}{2}\frac{\pi}{2} + U_{M(1)} - U_{M(2)} + U_{m_1(1)} - U_{m_1(2)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{\text{ολ}(A)}\omega_2^2 = F\frac{\ell}{2}\frac{\pi}{2} - Mg\frac{\ell}{2} - m_1g\ell \Rightarrow$$

$$\omega_2^2 = \frac{200}{\pi}\frac{\pi}{4} - 30\frac{1}{2} - 10 \Rightarrow \omega_2 = 5\frac{rad}{s}$$



Δ2. α) Ο ρυθμός μεταβολής στροφορμής του συστήματος δοκός – σώμα Σ1 στην οριζόντια θέση (2) είναι: $\frac{dL_{(A)}}{dt} = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \tau_{Mg} + \tau_{m_1g} = Mg\frac{\ell}{2} + m_1g\ell \Rightarrow \frac{dL_{(A)}}{dt} = 25Nm \otimes$

β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK_1}{dt} = +\Sigma\tau_{(1)}\cdot\omega_3 = +I_{m_1}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu(3)}\cdot\omega_3 \Rightarrow \frac{dK_1}{dt} = +m_1\ell^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu(3)}\cdot\omega_3$$

Υπολογίζουμε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}_3$ στη θέση (3) εφαρμόζοντας ΘΕΕ από τη θέση (2) στη θέση (3): $K_3 - K_2 = W_{Mg}^{2\to3} + W_{m_1g}^{2\to3} \Rightarrow \frac{1}{2}I_{\text{ολ}(A)}\omega_3^2 - \frac{1}{2}I_{\text{ολ}(A)}\omega_2^2 = U_{M(2)} - U_{M(3)} + U_{m_1(2)} - U_{m_1(3)} \Rightarrow$

$$\omega_3^2 - 25 = Mg\frac{\ell}{2} - 0 + m_1g\ell - 0 \Rightarrow \omega_3^2 = 50 \Rightarrow \omega_3 = 5\sqrt{2}\frac{rad}{s}$$

Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu(3)}$ στη θέση (3) το υπολογίζουμε από τον θεμελιώδη νόμο στροφικής: $\Sigma\tau_{(3)} = I_{\text{ολ}(A)}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu(3)} \Rightarrow \tau_{Mg} + \tau_{m_1g} = I_{\text{ολ}(A)}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu(3)} \Rightarrow Mg\frac{\ell}{2} + m_1g\ell = I_{\text{ολ}(A)}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu(3)} \Rightarrow$

$\alpha_{\gamma\omega\nu(3)} = 12{,}5\frac{rad}{s^2}$. Άρα $\frac{dK_1}{dt} = +m_1\ell^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu(3)}\cdot\omega_3 = +1\cdot12{,}5\cdot5\sqrt{2}\frac{J}{s} \Rightarrow \frac{dK_1}{dt} = +62{,}5\sqrt{2}\frac{J}{s}$

Δ3. Υπολογίζουμε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}_4$ στη θέση (4) εφαρμόζοντας ΘΕΕ από τη θέση (2) στη θέση (4):

$$K_4 - K_2 = W_{Mg}^{2\to4} + W_{m_1g}^{2\to4} \Rightarrow \frac{1}{2}I_{\text{ολ}(A)}\omega_4^2 - \frac{1}{2}I_{\text{ολ}(A)}\omega_2^2 = U_{M(2)} - U_{M(4)} + U_{m_1(2)} - U_{m_1(4)} \Rightarrow$$

$$\omega_4^2 - 25 = Mg\frac{\ell}{2} - \left(-Mg\frac{\ell}{2}\right) + m_1g\ell - (-m_1g\ell) \Rightarrow \omega_4^2 - 25 = Mg\ell + 2m_1g\ell \Rightarrow$$

$$\omega_4^2 - 25 = 50 \Rightarrow \omega_4^2 = 75 \Rightarrow \omega_4 = 5\sqrt{3}\frac{rad}{s}$$

Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Στροφορμής για την πλαστική κρούση του συστήματος δοκός – σώμα Σ1 με το σώμα Σ2 και έχουμε: $\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \vec{L}_{\kappa o\iota\nu\acute{\eta}} \Rightarrow \underset{\pi\rho\iota\nu}{I_{\text{ολ}(A)}}\omega_4 = \underset{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}{I_{\text{ολ}(A)}}\omega_\kappa \Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{3}M\ell^2 + m_1\ell^2\right)\omega_4 = \left(\frac{1}{3}M\ell^2 + (m_1+m_2)\ell^2\right)\omega_\kappa \Rightarrow 2\cdot5\sqrt{3} = 2{,}5\omega_\kappa \Rightarrow \omega_\kappa = 4\sqrt{3}\frac{rad}{s}$$