(1)

Παρατηρήσεις

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
(6-10-2019)

ΘΕΜΑ 1ο

Γ) 1. ΛΑΘΟΣ 3. ΣΩΣΤΟ 5. ΛΑΘΟΣ
2. ΛΑΘΟΣ 4. ΛΑΘΟΣ

Δ) α) Ψευδής, β) $f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$

Είναι συνεχής στο 0 και όχι παρ/μη.

ΘΕΜΑ 2ο

1. Η f συνεχής στο 0: $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+x+1)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2\sqrt{x}+\beta x+\gamma)$

$\boxed{\gamma=1}$

Η εφαπτόμενη για $x=4$ // $y=\frac{1}{2}x$ οπότε $f'(4)=1/2$

για $x>0$: $f(x)=2\sqrt{x}+\beta x+\gamma$ τότε $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\beta$ $\Rightarrow$

$\frac{1}{2}+\beta=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\beta=0}$

2. $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x<0 \\ 2\sqrt{x}+1, & x\geq 0 \end{cases}$

• Για $x<0$: $f(x)=x^2+x+1$ άρα $f'(x)=2x+1$

• Για $x>0$: $f(x)=2\sqrt{x}+1$ άρα $f'(x)=1/\sqrt{x}$

• Για $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2}{\sqrt{x}}=+\infty$

οπότε η f δεν είναι παρ/μη στο 0.

έτσι: $\boxed{f'(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<0 \\ 1/\sqrt{x}, & x>0 \end{cases}}$

②

Παρατηρήσεις

3. Για $x \geq 0$: $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$

έστω $x_1, x_2 \geq 0$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2\sqrt{x_1} + 1 = 2\sqrt{x_2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ οπότε η f είναι "1-1" άρα έχει αντίστροφη.

Έστω $f(x) = y \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 1 = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{y-1}{2}$ (πρέπει $y \geq 1$)

$\Leftrightarrow x = \frac{(y-1)^2}{4}$

Ισχύει $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{(y-1)^2}{4}, \ y \geq 1$

ή $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{(x-1)^2}{4}, \ x \geq 1}$

4. $f\left(f^{-1}(x^4+1) + 5\right) = 7$

$f\left(f^{-1}(x^4+1) + 5\right) = f(9) \xLeftrightarrow{f \text{ "1-1"}}$

$f^{-1}(x^4+1) + 5 = 9 \Leftrightarrow f^{-1}(x^4+1) = 4 \Leftrightarrow$

$f(f^{-1}(x^4+1)) = f(4) \Leftrightarrow x^4 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^4 = 4 \xLeftrightarrow{x \geq 0} \boxed{x = \sqrt{2}}$

ΘΕΜΑ 3º

1. $g(x) = 2\ln x + 5x^3 - 5, \ x > 0$

$g'(x) = \frac{2}{x} + 15x^2 > 0$ για $x > 0$ οπότε $g \nearrow \Rightarrow g$ "1-1"

Παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$ και αφού η g "1-1" είναι μοναδική.

2. $\ln(e^5 \cdot x^{-2}) \leq 5x^3 \Leftrightarrow \ln e^5 + \ln x^{-2} \leq 5x^3$

$\Leftrightarrow 5 - 2\ln x \leq 5x^3 \Leftrightarrow 5x^3 + 2\ln x - 5 \geq 0$

$\Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1) \xLeftrightarrow{g \nearrow} \boxed{x \geq 1}$

3. Ισχύει $g^{-1}(g(x))=x$, αφού g και g^{-1} παρ/μες συναρτήσεις και η $g^{-1}(g(x))$ παρ/μη ως σύνθεση παρ/μων συναρτήσεων.

Τότε $(g^{-1})'(g(x))\cdot g'(x)=1 \xRightarrow{x=1} (g^{-1})'(g(1))\cdot g'(1)=1$

$\Leftrightarrow (g^{-1})'(0)\cdot 17=1 \Leftrightarrow \boxed{(g^{-1})'(0)=1/17}$

4. $\eta\mu^2 x - x^4 \leq x\cdot f(x) \leq \eta\mu^2 x + x^4$ (1)

Για $x>0$:

$$\frac{\eta\mu^2 x}{x} - \frac{x^4}{x} \leq f(x) \leq \frac{\eta\mu^2 x}{x} + \frac{x^4}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x - x^3 \leq f(x) \leq \frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x + x^3$$

- $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x - x^3\right) = 1\cdot 0 - 0 = 0$
- $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x + x^3\right) = 1\cdot 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow$ Από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

όμως η f συνεχής στο 0

οπότε $\boxed{f(0)=0}$

- $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

$(1) \xRightarrow{:x^2\neq 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - x^2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + x^2$

- $\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - x^2\right) = 1 = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + x^2\right)$

οπότε από κρ. παρεμβολής $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$ άρα $\boxed{f'(0)=1}$

εφ: $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow \boxed{y=x}$

Παρατηρήσεις

ΘΕΜΑ 4ο

1. $g(x) = (x^2+1)^{-x} = e^{\ln(x^2+1)^{-x}} = e^{-x\cdot\ln(x^2+1)}$ (1)

$g'(x) = e^{-x\cdot\ln(x^2+1)}\cdot(-x\ln(x^2+1))'$

$= e^{-x\ln(x^2+1)}\cdot\left(-\ln(x^2+1) - x\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\right)$

$= e^{-x\cdot\ln(x^2+1)}\left(-\ln(x^2+1) - \frac{2x^2}{x^2+1}\right) < 0$

αφού $\underbrace{x^2+1>1}_{\Rightarrow x>0} \Leftrightarrow \ln(x^2+1)>0 \Leftrightarrow -\ln(x^2+1)<0$

Άρα $g'(x)<0 \Rightarrow g \downarrow$

Από την σχέση (1) $\Rightarrow g(x)>0$

2. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x-h)}{2h} =$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(x+3h)-f(x)}{h} - \frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right] = A$

- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{h} \xrightarrow[\text{Για } h\to 0 \text{ το } u\to 0]{u=3h} \lim\limits_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{\frac{u}{3}}$

$= 3\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u} = 3f'(x)$

- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} \xrightarrow[\text{Για } h\to 0 \text{ το } u\to 0]{u=-h} \lim\limits_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{-u}$

$= -\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u} = -f'(x)$

Άρα η παράσταση $A=\frac{1}{2}(3f'(x)+f'(x)) = 2f'(x)$

Επειδή θα ισχύει $2f'(x) = 4x^2+\ln x^2 \Leftrightarrow 2f'(x) = 4x^2+2\ln x \Leftrightarrow$

5

Παρατηρήσεις

$\Leftrightarrow \boxed{f'(x) = 2x^2 + \ln x \quad , x>0}$

$f''(x) = 4x + 1/x > 0$ αφού $x>0 \Rightarrow f' \uparrow$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[(f(g(x)+1) - 2) \cdot (x^2+1)^x \right] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(g(x)+1) - 2}{(x^2+1)^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(g(x)+1)-2}{g(x)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(g(x)+1) - 2}{g(x)+1 - 1} = A$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x)+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-x \cdot \ln(x^2+1)} + 1 \right) = e^{-\infty} + 1 = 1$

Αν θέσουμε $u = g(x)+1$ για $x \to +\infty$ το $u \to 1$

οπότε $A = \lim\limits_{u\to 1} \dfrac{f(u) - f(1)}{u-1} = f'(1) = 2$

4. $f'(\ln(x^2+1)+2) \cdot g\left((x^2+1)^{-1} + 1 \right) \leq f'\left((x^2+1)^{-1} + 1 \right) \cdot g\left(\ln(x^2+1)+2 \right)$

$\xLeftrightarrow{g(x)>0} \dfrac{f'(\ln(x^2+1)+2)}{g(\ln(x^2+1)+2)} \leq \dfrac{f'((x^2+1)^{-1}+1)}{g((x^2+1)^{-1}+1)}$

Έστω $K(x) = \dfrac{f'(x)}{g(x)}$, $x \geq 1$

Αφού οι αρχικές ποσότητες $\ln(x^2+1)+2$, $(x^2+1)^{-1}+1 \geq 1$

έστω $x_1, x_2 \geq 1$ με $x_1 < x_2$

$\begin{cases} \xLeftrightarrow{f' \uparrow} f'(x_1) < f'(x_2) \\ \xLeftrightarrow{g \downarrow} g(x_1) > g(x_2) \xLeftrightarrow{g(x)>0} \dfrac{1}{g(x_1)} < \dfrac{1}{g(x_2)} \end{cases} \xrightarrow[f'(x)>0 \text{ για } x\geq 1]{(\cdot)}$

6

Παρατηρήσεις

$\frac{f'(x_1)}{g(x_1)} < \frac{f'(x_2)}{g(x_2)} \Leftrightarrow K(x_1) < K(x_2)$ Άρα η $K(x) \uparrow$

έτσι η αρχική σχέση:

$K(\ln(x^2+1)+2) \leq K((x^2+1)^{-1}+1) \overset{K \uparrow}{\Leftrightarrow}$

$\ln(x^2+1)+2 \leq (x^2+1)^{-1}+1 \Leftrightarrow$

$\ln(x^2+1) - \frac{1}{(x^2+1)} + 1 \leq 0$ (*)

Αν $T(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$, $T'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow T(x) \uparrow$

(*) $\Rightarrow T(x^2+1) \leq T(1)$

$\overset{T \uparrow}{\Leftrightarrow} x^2+1 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$